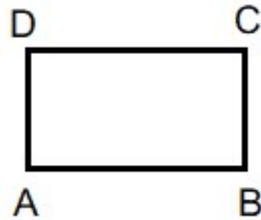


Geometrie B5

A(6/0/9); B(0/6/9); C(-1/5/17)



$$\text{a) } \vec{D} = \vec{A} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1-0 \\ 5-6 \\ 17-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{D(5/-1/17)}}$$

- b) Für die Ebenengleichung nehmen wir A als Aufpunkt sowie $\vec{AB}$ und $\vec{AD} = \vec{BC}$ als Richtungsvektoren:

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}; \vec{AB} = \begin{pmatrix} 0-6 \\ 6-0 \\ 9-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = -6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die Koordinatenform bilden wir das Kreuzprodukt der beiden gekürzten Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n_E} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E: 4x_1 + 4x_2 + x_3 + c = 0$$

$$\text{Einsetzen von A: } 4 \cdot 6 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 9 + c = 0 \Rightarrow c = -33$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E: 4x_1 + 4x_2 + x_3 - 33 = 0}}$$

- c) Der Zielkreis passt auf das Rechteck, wenn $|\vec{AB}| \geq 8$ und $|\vec{BC}| \geq 8$.

$$|\vec{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2} = \sqrt{72} > 8$$

$$|\vec{BC}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 8^2} = \sqrt{66} > 8$$

Bedingung I ist also erfüllt.

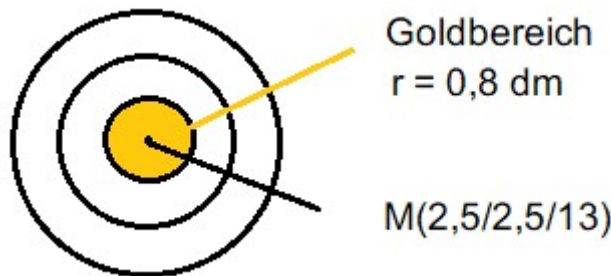
- d) Der Winkel zwischen der Ebene E und der x_1x_2 -Ebene ist der Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren:

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{33} \cdot 1}$$

$$\Rightarrow \varphi \approx 79,98^\circ$$

Da $75^\circ < 79,98^\circ < 80^\circ$, ist auch Bedingung II erfüllt.

e)



Flugbahn der Pfeilspitze: $(2s / 3s / -0,01s^2 + s + 12,01)$

Um zu zeigen, dass der Pfeil in den Goldbereich trifft, berechnen wir zunächst den Schnittpunkt S mit der Ebene E. Der Pfeil trifft in den Goldbereich, wenn $|\overline{MS}| \leq 0,8$.

Einsetzen der Pfeilspitze in E ergibt:

$$4 \cdot 2s + 4 \cdot 3s - 0,01s^2 + s + 12,01 - 33 = 0 \Rightarrow 8s + 12s - 0,01s^2 + s - 20,99 = 0$$

$$\Rightarrow -0,01s^2 + 21s - 20,99 = 0$$

$$\Rightarrow s_{1/2} = \frac{-21 \pm \sqrt{21^2 - 4 \cdot (-0,01) \cdot (-20,99)}}{2 \cdot (-0,01)} = \frac{-21 \pm \sqrt{440,1604}}{-0,02} \Rightarrow s_1 = 2099; s_2 = 1$$

Einsetzen in die Gleichung der Pfeilspitze ergibt:

$$(2 \cdot 2099 / 3 \cdot 2099 / -0,01 \cdot 2099^2 + 2099 + 12,01) = (4198 / 6297 / -41947)$$

Wegen der negativen z-Koordinate liegt der Punkt unterhalb des Bodens und kommt damit nicht in Betracht.

$$(2 \cdot 1 / 3 \cdot 1 / -0,01 \cdot 1^2 + 1 + 12,01) = (2 / 3 / 13) = S$$

$$|\overline{MS}| = \left| \begin{pmatrix} 2 - 2,5 \\ 3 - 2,5 \\ 13 - 13 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-0,5)^2 + 0,5^2} = \sqrt{0,5} \approx 0,707 < 0,8$$

Der Pfeil trifft also in den Goldbereich.

f) Zweiter Pfeil mit Auftreffpunkt $\overrightarrow{OP_a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 0,75 \\ -0,75 \\ 0 \end{pmatrix}; a \in [0;1]$

Die möglichen Auftreffpunkte liegen also auf einer Strecke.

Zunächst zeigen wir, dass M auf dieser Strecke liegt.

Wir setzen ein:

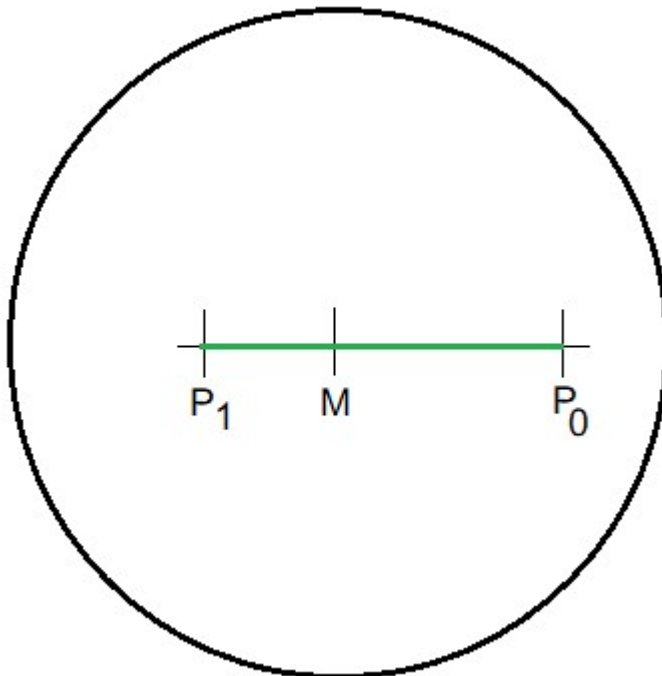
$$\begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 0,75 \\ -0,75 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2,5 = 2 + 0,75a \Rightarrow 0,75a = 0,5 \Rightarrow a = \frac{2}{3} \\ 2,5 = 3 - 0,75a \Rightarrow 0,75a = 0,5 \Rightarrow a = \frac{2}{3} \\ 13 = 13 \end{array}$$

Da das Gleichungssystem zu einem eindeutigen Ergebnis führt und $\frac{2}{3} \in [0;1]$, ist M eine mögliche Auftreffposition.

P_0 ist der Anfangspunkt der Strecke ($a = 0$). M liegt auf der Strecke.

Wegen $a = \frac{2}{3}$ gilt: $\overrightarrow{P_0M} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{P_0P_1}$

Es muss also links von M noch die Hälfte von $\overrightarrow{P_0M}$ angetragen werden:



Der Goldbereich wird also immer getroffen, da jeder Punkt der Strecke innerhalb des Kreises liegt.