

Analysis B2

1 $f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + ax + \frac{1}{4}; a \in \mathbb{R}$

a) $f_a(1) = -1: \frac{1}{4} \cdot 1^3 + a \cdot 1^2 + a \cdot 1 + \frac{1}{4} = -1 \Rightarrow \frac{1}{4} + a + a + \frac{1}{4} = -1 \Rightarrow 2a = -\frac{3}{2}$
 $\Rightarrow a = -\frac{3}{4}$

$$f_a'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2ax + a; f_a''(x) = \frac{3}{2}x + 2a$$

$$f_a''(x) = 0: \frac{3}{2}x + 2a = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x = -2a \Rightarrow x'' = -\frac{4}{3}a$$

$$a = -\frac{3}{4} \text{ eingesetzt ergibt: } x'' = -\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 1$$

Da der Punkt auf dem Graphen liegt und es sich um eine einfache Nullstelle der 2. Ableitung handelt, ist $(1/-1)$ Wendepunkt des Graphen.

b) $f_a(x) = f_b(x): \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + ax + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}x^3 + bx^2 + bx + \frac{1}{4} \Rightarrow ax^2 + ax = bx^2 + bx$
 $\Rightarrow x(ax + a) = x(bx + b) \Rightarrow \underline{x_1 = 0}$
 $ax + a = bx + b \Rightarrow ax - bx = b - a \Rightarrow x(a - b) = b - a \quad | : (a - b) \neq 0$
 $\Rightarrow x_2 = \frac{b - a}{a - b} = \frac{-(a - b)}{a - b} = -1$

Es gibt also genau zwei Punkte, durch die alle Graphen der Schar verlaufen.

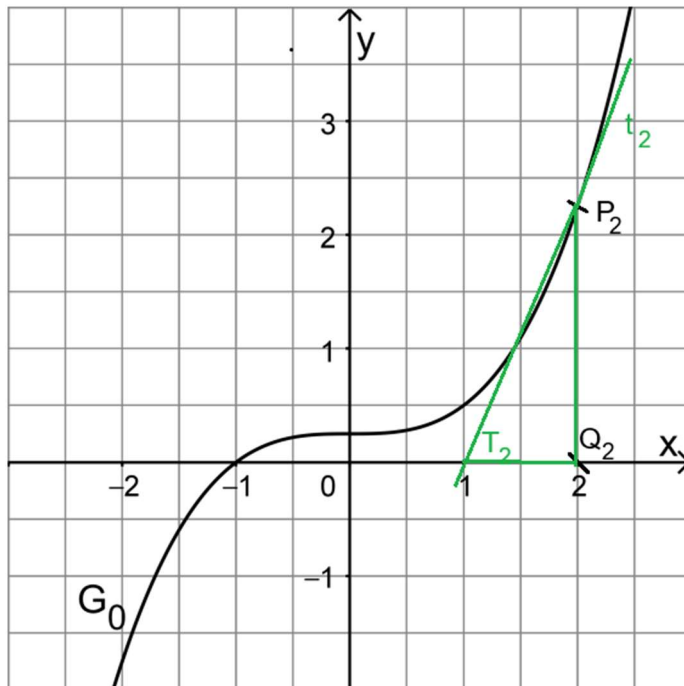
$$f_a(0) = \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{P\left(0 / \frac{1}{4}\right)}$$

$$f_a(-1) = \frac{1}{4}(-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + a \cdot (-1) + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + a - a + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \underline{Q(-1/0)}$$

c) $f_0(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}$

Der Graph von G_0 muss um $\frac{1}{4}$ LE nach unten und um 1 LE nach links verschoben werden.

d)



Für die Steigung der Tangente gilt: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow f_0'(u) = \frac{f_0(u)}{\left| \overline{T_u Q_u} \right|} \Rightarrow \left| \overline{T_u Q_u} \right| = \frac{f_0(u)}{f_0'(u)}$

$$2 \quad h(x) = -\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) + 1; \quad h'(x) = -\frac{\pi}{4} \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right)\right) \cdot \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi^2}{12} \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right)\right);$$

$$h''(x) = -\frac{\pi^2}{12} \cdot \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right)\right) \cdot \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi^3}{36} \cdot \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right)\right) = \frac{\pi^3}{36} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right)$$

- a) Die Hochpunkte sind bei $x_1 = 3$; $x_2 = 9$; $x_3 = 15$; $x_4 = 21$; $x_5 = 27$; $x_6 = 33$;
 $x_7 = 39$; $x_8 = 45$; $x_9 = 51$; $x_{10} = 57$

Der Maximalwert wird also in den ersten 60 Sekunden **10 mal** erreicht.

Die stärkste Zunahme liegt in einem der Wendepunkte vor:

$$\underline{h''(x) = 0}: \quad \frac{\pi^3}{36} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3} \cdot x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{3}{2}}}$$

Da es sich um eine einfache Nullstelle handelt, liegt dort ein Wendepunkt vor.
Aus dem Graphen ergibt sich, dass dieser Wert im steigenden Teil liegt, also nimmt dort die momentane Durchflussrate (nach 1,5 Sekunden) am stärksten zu.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int_5^9 h(x) dx &= \left[-\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right)}{\frac{\pi}{3}} + x \right]_5^9 = \left[-\frac{3}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) + x \right]_5^9 \\
 &= \left[-\frac{3}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot 9\right) + 9 \right] - \left[-\frac{3}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot 5\right) + 5 \right] \\
 &= \left[-\frac{3}{4} \cdot \underbrace{\sin(3\pi)}_{=0} + 9 \right] - \left[-\frac{3}{4} \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) + 5 \right] = 9 + \frac{3}{4} \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) - 5 \\
 &= 4 + \frac{3}{4} \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 3,3504...
 \end{aligned}$$

Im Zeitraum von 5 bis 9 Sekunden nach Beobachtungsbeginn treten etwa 3,35 Liter Wasser aus der Düse aus.

- c) Die Zeitspanne zwischen 2 Maximalwerten beträgt $1,5 \cdot 6 = 9$ Sekunden.
 Der erste Hochpunkt kommt entsprechend nach 4,5 Sekunden.

