

Analysis II

1.1 Funktionsgleichung

Aus den Nullstellen ergibt sich: $f(x) = a \cdot x \cdot (x - 6)^2$

$P(1/-5)$ eingesetzt: $-5 = a \cdot 1 \cdot (1 - 6)^2 \Rightarrow -5 = 25a \Rightarrow a = -0,2$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -0,2 \cdot x \cdot (x - 6)^2}}$$

$$f(x) = -0,2 \cdot x \cdot (x - 6)^2 = -0,2x(x^2 - 12x + 36) = \underline{\underline{-0,2x^3 + 2,4x^2 - 7,2x}}$$

1.2 Wendepunkt

$$f'(x) = -0,6x^2 + 4,8x - 7,2; f''(x) = -1,2x + 4,8$$

$$\underline{f''(x) = 0} : -1,2x + 4,8 = 0 \Rightarrow 1,2x = 4,8 \Rightarrow x'' = 4$$

$$f(4) = -0,2 \cdot 4^3 + 2,4 \cdot 4^2 - 7,2 \cdot 4 = -3,2$$

Da es sich um eine einfache Nullstelle der 2. Ableitung handelt, liegt dort ein Wendepunkt vor. Dieser ist laut Graph im steigenden Teil des Graphen.

Im Punkt $(4 / -3,2)$ hat G_f daher die maximale positive Steigung.

Da eine ganzrationale Funktion 3. Grades nur einen Wendepunkt besitzt und wegen

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ gibt es keine Stelle, für die f' ein absolutes

Minimum annimmt.

1.3 Fläche

$$\begin{aligned} \int_0^6 f(x) dx &= \int_0^6 -0,2x^3 + 2,4x^2 - 7,2x dx = \left[-0,2 \cdot \frac{x^4}{4} + 2,4 \cdot \frac{x^3}{3} - 7,2 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^6 \\ &= \left[-0,05x^4 + 0,8x^3 - 3,6x^2 \right]_0^6 = \left[-0,05 \cdot 6^4 + 0,8 \cdot 6^3 - 3,6 \cdot 6^2 \right] - 0 = -21,6 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A = 21,6}}$$

2.1 $H(t) = (5t^2 - 2) \cdot e^{-k \cdot t}; k \in \mathbb{R}^+$

$$H(0) = (-2) \cdot \underbrace{e^0}_{=1} = -2$$

Die Samen wurden in 2 cm Tiefe in die Erde gepflanzt.

2.2

$$\begin{aligned} \underline{H(3) = 9,6}: (5 \cdot 3^2 - 2) \cdot e^{-k \cdot 3} &= 9,6 \Rightarrow 43 \cdot e^{-3k} = 9,6 \Rightarrow e^{-3k} = \frac{9,6}{43} \\ \Rightarrow -3k &= \ln \frac{9,6}{43} \Rightarrow k = -\frac{1}{3} \ln \frac{9,6}{43} \approx \underline{\underline{0,5}} \end{aligned}$$

2.3.1 $H(t) = (5t^2 - 2) \cdot e^{-0,5 \cdot t}$

Für die Ableitung brauchen wir die Produkt- und die Kettenregel:

$$\begin{aligned} \dot{H}(t) &= 10t \cdot e^{-0,5 \cdot t} + (5t^2 - 2) \cdot e^{-0,5 \cdot t} \cdot (-0,5) = e^{-0,5 \cdot t} (10t + (5t^2 - 2) \cdot (-0,5)) \\ &= e^{-0,5 \cdot t} (10t - 2,5t^2 + 1) = e^{-0,5 \cdot t} (-2,5t^2 + 10t + 1) \end{aligned}$$

$$\underline{\dot{H}(t) = 0}: \underbrace{e^{-0,5 \cdot t}}_{\neq 0} (-2,5t^2 + 10t + 1) = 0 \Rightarrow -2,5t^2 + 10t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4(-2,5) \cdot 1}}{-5} = \frac{-10 \pm \sqrt{110}}{-5} \Rightarrow t_1 \approx 4,1; t_2 \approx -0,1 \notin D$$

Da die Pflanze wächst, handelt es sich bei $t_1 = 4,1$ um ein Maximum. Dieses ist auch absolut, da es keine weitere Extremstelle im Definitionsbereich gibt.

$$H(4,1) = (5 \cdot 4,1^2 - 2) \cdot e^{-0,5 \cdot 4,1} = 82,05 \cdot e^{-2,05} \approx 10,6$$

Die maximale Höhe über der Pflanze beträgt 10,6 cm.

2.3.2 Durchschnittliche Wachstumsrate

$$\frac{H(3) - H(0)}{3 - 0} = \frac{(5 \cdot 3^2 - 2) \cdot e^{-0,5 \cdot 3} - (-2) \cdot e^0}{3} = \frac{43 \cdot e^{-1,5} + 2}{3} \approx \underline{\underline{3,9}}$$

Die durchschnittliche Wachstumsrate in den ersten drei Tagen beträgt ca. 3,9 cm/Tag

2.3.3



2.3.4

75 % der Maximalhöhe über der Pflanze Erde sind $0,75 \cdot 10,6 = 7,95$.



Zwischen etwa 2,3 und 6,7 Tagen nach Pflanzen der Samen beträgt die Höhe der Pflanze über der Pflanze Erde mindestens 75 % der maximalen Höhe. Der Zeitraum beträgt somit $6,7 - 2,3 = 4,4$ Tage.

3.1 $u(x) = -0,01x^2 + 100$

$$A(x) = 2x \cdot u(x) = 2x \cdot (-0,01x^2 + 100) = \underline{\underline{-0,02x^3 + 200x}}$$

3.2 $A'(x) = -0,06x^2 + 200$; $A''(x) = -0,12x$

$$\underline{A'(x) = 0} : -0,06x^2 + 200 = 0 \Rightarrow 0,06x^2 = 200 \Rightarrow x^2 = 3333\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{3333\frac{1}{3}} \approx \pm 57,8$$

Der negative Wert ist nicht definiert. $\Rightarrow x' = 57,8$

Da $A''(57,8) = -1,2 \cdot 57,8 < 0$, handelt es sich um ein Maximum. Da dies das einzige Extremum im Definitionsbereich ist, ist es ein absolutes Maximum.

Die Abmessungen der Seebühne betragen in diesem Fall $2 \cdot 57,8 \approx 115\text{m}$

und $u(57,8) = -0,01 \cdot 57,8^2 + 100 \approx 67\text{m}$.