

Analysis I

$$1 \quad f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d; \quad f'(x) = x^3 + 3ax^2 + 2bx + c;$$
$$f''(x) = 3x^2 + 6ax + 2b$$

1.1 Der Terrassenpunkt im Ursprung ergibt bereits drei Gleichungen:

$$I \quad \underline{f''(0) = 0}: 3x^2 + 6ax + 2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$II \quad \underline{f'(0) = 0}: c = 0$$

$$III \quad \underline{f(0) = 0}: d = 0$$

Aus dem TIP bei $x = 3$ ergibt sich:

$$IV \quad \underline{f'(3) = 0}: 3^3 + 3a \cdot 3^2 + 2 \cdot 0 \cdot 3 + 0 = 0 \Rightarrow 27 + 27a = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3}}$$

1.2 Nullstellen

$$\underline{f(x) = 0}: \frac{1}{4}x^4 - x^3 = 0 \Rightarrow x^3 \left(\frac{1}{4}x - 1 \right) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_{1/2/3} = 0}}$$

$$\frac{1}{4}x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}x = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_4 = 4}}$$

Waagrechte Tangenten

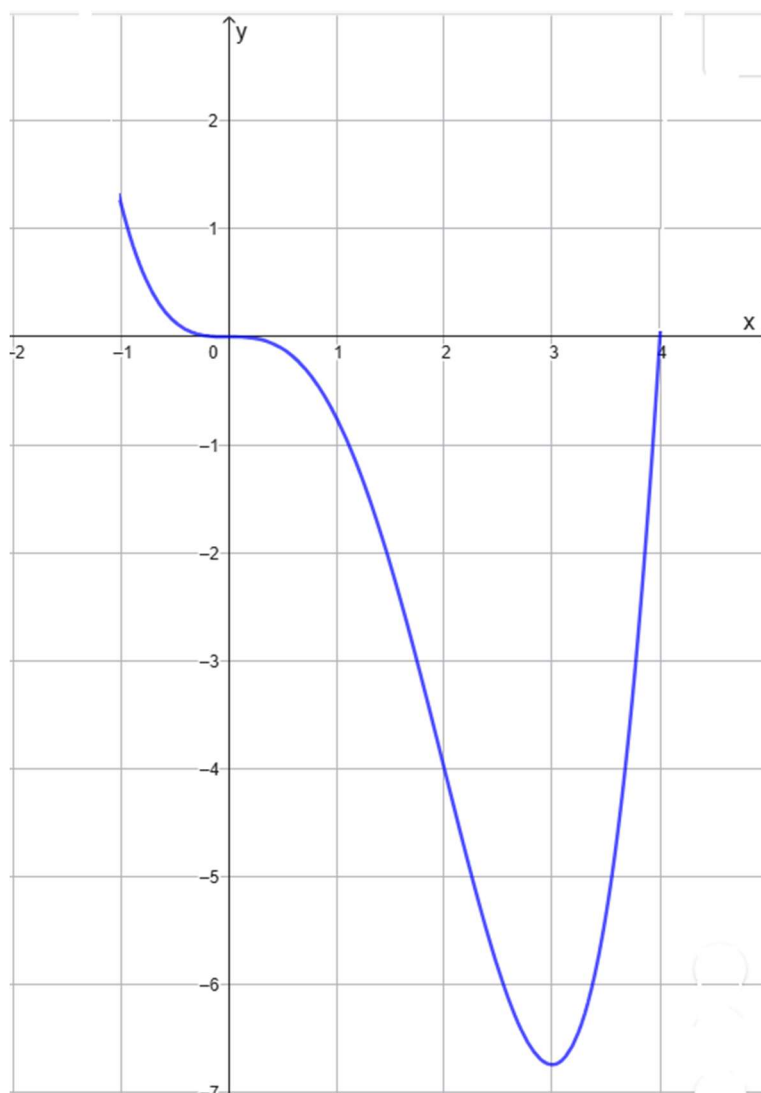
$$f'(x) = x^3 - 3x^2$$

$$\underline{f'(x) = 0}: x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x - 3) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_{1/2}' = 0}}; \underline{\underline{x_3' = 3}}$$

$$f(0) = 0 \text{ (s.o.)} \Rightarrow \underline{\underline{E_1(0/0)}};$$

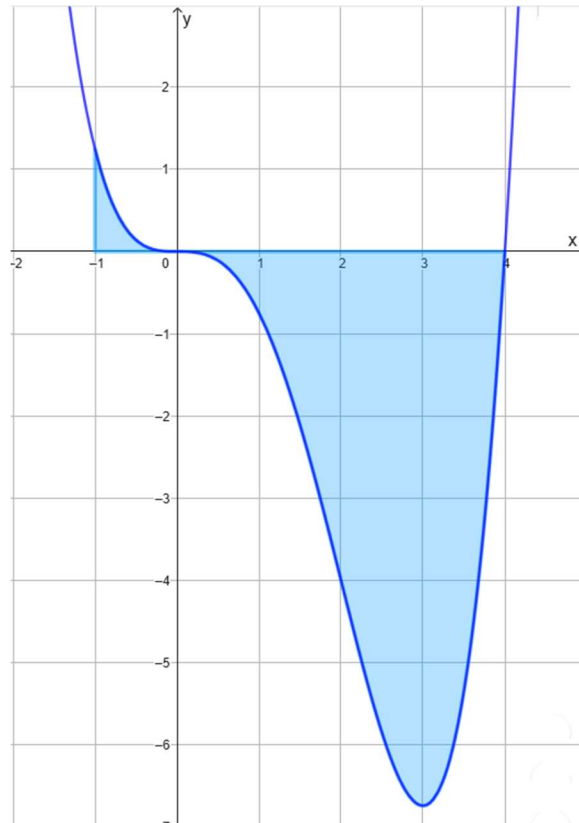
$$f(3) = \frac{1}{4} \cdot 81 - 27 = 20,25 - 27 = -6,75 \Rightarrow \underline{\underline{E_2(3 / -6,75)}}$$

1.3



$$\begin{aligned}
 1.4 \quad \int_{-1}^4 f(x) dx &= \int_{-1}^4 \frac{1}{4}x^4 - x^3 dx = \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^4 = \left[\frac{4^5}{20} - \frac{4^4}{4} \right] - \left[\frac{(-1)^5}{20} - \frac{(-1)^4}{4} \right] \\
 &= [51,2 - 64] - \left[-\frac{1}{20} - \frac{1}{4} \right] = -12,8 + 0,3 = \underline{\underline{-12,5}}
 \end{aligned}$$

Das größere der beiden Flächenstücke ist das rechte unterhalb der x-Achse. Daher ist das Integral insgesamt negativ (Flächenbilanz).



1.5 $g(x) = f(x) + 7$

Der Graph von g ergibt sich durch Verschiebung des Graphen von f um 7 nach oben. Für den absoluten TIP von g gilt dann: TIP(3 / 0,25)

Daher liegen alle Punkte oberhalb der x-Achse. Es gibt somit keine Nullstelle.

$$\int_1^3 g(x) - f(x) dx = \int_1^3 f(x) + 7 - f(x) dx = \int_1^3 7 dx = [7x]_1^3 = 21 - 7 = \underline{\underline{14}}$$

2 $K_A(t) = 20000 \cdot 1,02^t$; $K_B(t) = 30000 \cdot 0,98^t$

$$\underline{K_A(t) = K_B(t)}: 20000 \cdot 1,02^t = 30000 \cdot 0,98^t \Rightarrow 1,02^t = 1,5 \cdot 0,98^t \Rightarrow \frac{1,02^t}{0,98^t} = 1,5$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1,02}{0,98} \right)^t = 1,5 \Rightarrow 1,0408^t = 1,5 \Rightarrow \ln 1,0408^t = \ln 1,5$$

$$\Rightarrow t \cdot \ln 1,0408 = \ln 1,5 \Rightarrow t = \frac{\ln 1,5}{\ln 1,0408} = 10,139...$$

Nach ca. **10,1 Jahren** haben beide Anlagen den gleichen Wert.

3 $P(t) = 200 \cdot t \cdot e^{-0,25 \cdot t + 0,75}$; $t \in [0; 12]$

3.1 $P(11) = 200 \cdot 11 \cdot e^{-0,25 \cdot 11 + 0,75} = 2200 \cdot e^{-2} = 297,737...$

Nach 11 Wochen gibt es 298 Patienten mit starkem Befall.

3.2 Absolutes Maximum

$$\dot{P}(t) = 200 \cdot 1 \cdot e^{-0,25 \cdot t + 0,75} + 200 \cdot t \cdot e^{-0,25 \cdot t + 0,75} \cdot (-0,25) = e^{-0,25 \cdot t + 0,75} (200 - 50 \cdot t)$$

$$\underline{\dot{P}(t) = 0}: \underbrace{e^{-0,25 \cdot t + 0,75}}_{\neq 0} (200 - 50 \cdot t) = 0 \Rightarrow 200 - 50t = 0 \Rightarrow 50t = 200 \Rightarrow t = 4$$

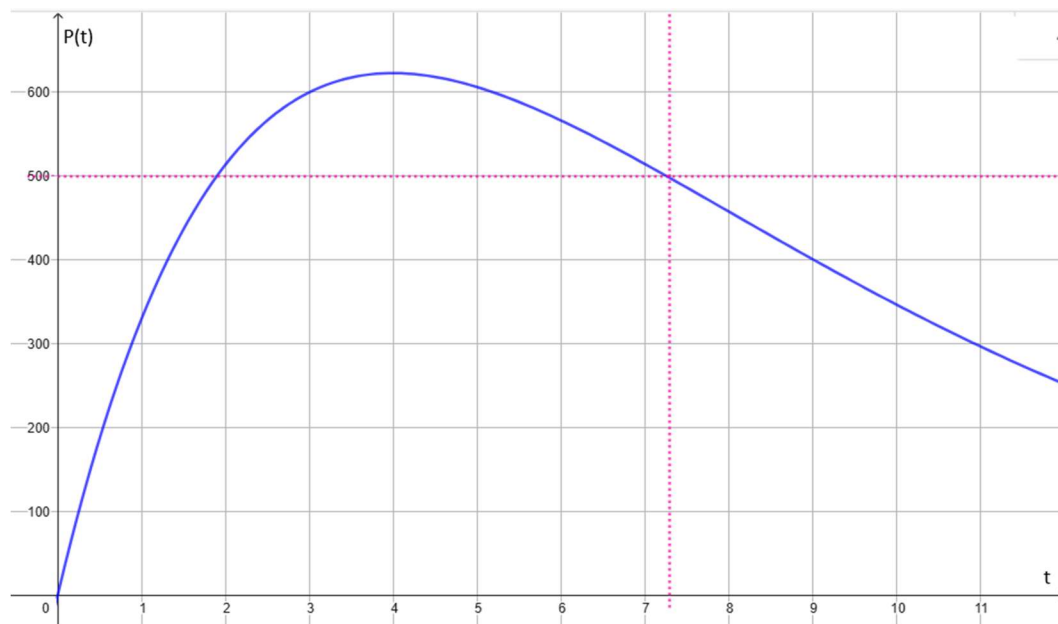
Dies ist das einzige Extremum im Beobachtungszeitraum.

$$P(4) = 200 \cdot 4 \cdot e^{-0,25 \cdot 4 + 0,75} = 800 \cdot e^{-0,25} = 623,040... \approx 620 > 298$$

Nach vier Wochen hat die Funktion daher ihr absolutes Maximum.

Auch hinsichtlich der maximalen Anzahl der Patienten spiegelt das Modell die Daten gut wider.

3.3



Nach etwa 7,3 Wochen nach Beobachtungsbeginn ist die momentane Anzahl der Patienten nach Erreichen des Maximalwerts erstmals wieder auf 500 gesunken. Das ist Ende **Juni**.

- 3.4** Nach 8 Wochen liegt ein Wendepunkt vor. Die Abnahme der momentanen Anzahl der Patienten ist dort am stärksten.

$$\dot{P}(8) = e^{-0,25 \cdot 8 + 0,75} (200 - 50 \cdot 8) = e^{-1,25} (-200) = -57,3$$

Die Anzahl der Patienten nimmt in der 8. Woche um 57 ab.