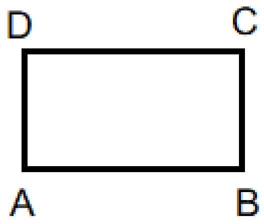
Geometrie B5

A(6 / 0 / 9); B(0 / 6 / 9); C(−1 / 5 / 17)



a) $\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1-0 \\ 5-6 \\ 17-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{D(5/-1/17)}}$

b) Für die Ebenengleichung nehmen wir A als Aufpunkt sowie $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ als Richtungsvektoren:

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-6 \\ 6-0 \\ 9-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = -6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die Koordinatenform bilden wir das Kreuzprodukt der beiden gekürzten Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n_E} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow E: 4x_1 + 4x_2 + x_3 + c = 0$

Einsetzen von A: $4 \cdot 6 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 9 + c = 0 \quad \Rightarrow c = -33$

$\Rightarrow \underline{\underline{E: 4x_1 + 4x_2 + x_3 - 33 = 0}}$

c) Der Zielkreis passt auf das Rechteck, wenn $\left|\overrightarrow{AB}\right| \geq 8$ und $\left|\overrightarrow{BC}\right| \geq 8$.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2} = \sqrt{72} > 8$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 8^2} = \sqrt{66} > 8$$

Bedingung I ist also erfüllt.

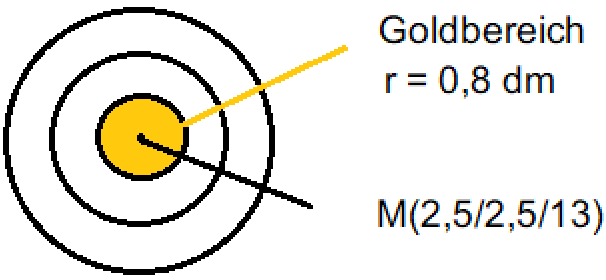
d) Der Winkel zwischen der Ebene E und der x_1x_2-Ebene ist der Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren:

$$\cos(\varphi)=\frac{\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}=\frac{1}{\sqrt{4^2+4^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{33}\cdot 1}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{\varphi\approx 79{,}98^0}}$

Da $75^0<79{,}98^0<80^0$, ist auch Bedingung II erfüllt.

e)



Flugbahn der Pfeilspitze: $(2s\,/\,3s\,/\,-0{,}01s^2+s+12{,}01)$

Um zu zeigen, dass der Pfeil in den Goldbereich trifft, berechnen wir zunächst den Schnittpunkt S mit der Ebene E. Der Pfeil trifft in den Goldbereich, wenn $\overrightarrow{MS}\le 0{,}8$.

Einsetzen der Pfeilspitze in E ergibt:

$4\cdot 2s+4\cdot 3s-0{,}01s^2+s+12{,}01-33=0 \;\Rightarrow 8s+12s-0{,}01s^2+s-20{,}99=0$

$\Rightarrow -0{,}01s^2+21s-20{,}99=0$

$$\Rightarrow s_{1/2}=\frac{-21\pm\sqrt{21^2-4\cdot(-0{,}01)\cdot(-20{,}99)}}{2\cdot(-0{,}01)}=\frac{-21\pm\sqrt{440{,}1604}}{-0{,}02}\Rightarrow s_1=209{,}9;\; s_2=1$$

Einsetzen in die Gleichung der Pfeilspitze ergibt:

$(2\cdot 209{,}9\,/\,3\cdot 209{,}9\,/\,-0{,}01\cdot 209{,}9^2+209{,}9+12{,}01)\;=(419{,}8\,/\,629{,}7\,/\,-218{,}6701)$

Wegen der negativen -Koordinate liegt der Punkt unterhalb des Bodens und kommt damit nicht in Betracht.

$(2\cdot 1\,/\,3\cdot 1\,/\,-0{,}01\cdot 1^2+1+12{,}01)\;=(2\,/\,3\,/\,13)=S$

$$\left|\overrightarrow{MS}\right|=\left|\begin{pmatrix}2-2{,}5\\3-2{,}5\\13-13\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-0{,}5\\0{,}5\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-0{,}5)^2+0{,}5^2}=\sqrt{0{,}5}\approx 0{,}707<0{,}8$$

Der Pfeil trifft also in den Goldbereich.

f) Zweiter Pfeil mit Auftreffpunkt $\overrightarrow{0P_a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 0,75 \\ -0,75 \\ 0 \end{pmatrix}$; $a \in [0;1]$

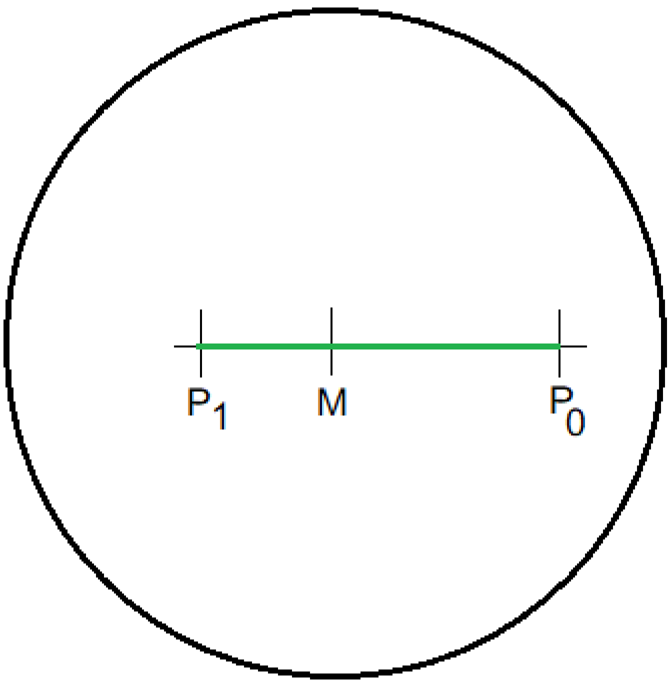
Die möglichen Auftreffpunkte liegen also auf einer Strecke.

Zunächst zeigen wir, dass M auf dieser Strecke liegt.
Wir setzen ein:

$$\begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 0,75 \\ -0,75 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2,5 = 2 + 0,75a \Rightarrow 0,75a = 0,5 \Rightarrow a = \frac{2}{3} \\ 2,5 = 3 - 0,75a \Rightarrow 0,75a = 0,5 \Rightarrow a = \frac{2}{3} \\ 13 = 13 \end{array}$$

Da das Gleichungssystem zu einem eindeutigen Ergebnis führt und $\frac{2}{3} \in [0;1]$, ist M eine mögliche Auftreffposition.

P_0 ist der Anfangspunkt der Strecke ($a = 0$). M liegt auf der Strecke.
Wegen $a = \frac{2}{3}$ gilt: $\overline{P_0M} = \frac{2}{3} \cdot \overline{P_0P_1}$
Es muss also links von M noch die Hälfte von $\overline{P_0M}$ angetragen werden:



Der Goldbereich wird also immer getroffen, da jeder Punkt der Strecke innerhalb des Kreises liegt.