Stochastik B3

1 20 Bergeidechsen

X: Anzahl der weiblichen Echsen (binomialverteilt)

Zunächst: $p = 0{,}5$

a) $P(A) = P(X = 10) = B(20;0{,}5;10) \overset{TR/TW}{=} \underline{\underline{0{,}17620 \approx 17{,}6\,\%}}$

$$P(B) = P(X > 10) = P(X \geq 11) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \sum_{i=0}^{10} B(20;0{,}5;i) \overset{TR/TW}{=} 1 - 0{,}58810$$
$$= \underline{\underline{0{,}41190 \approx 41{,}2\,\%}}$$

b) $P(|X - \mu| \geq 3) = 2 \cdot P_{0{,}5}^{20}(X \leq 7)\,?$

$\mu = 20 \cdot 0{,}5 = 10$

$P(|X - 10| \geq 3) = P(X \leq 7) + P(X \geq 13)$

Wegen $p = 0{,}5$ gilt Symmetrie zum Erwartungswert. $\Rightarrow P(X \leq 7) = P(X \geq 13)$

$\Rightarrow P(|X - \mu| \geq 3) = 2 \cdot P_{0{,}5}^{20}(X \leq 7)$

c) $p < 0{,}5$

Eine 3-mal-mindestens-Aufgabe, bei der die Trefferquote gesucht ist:

$P(X \geq 1) \geq 0{,}98 \;\Rightarrow P(X = 0) \leq 0{,}02$

$$\Rightarrow \underbrace{\binom{20}{0}}_{=1} \cdot \underbrace{p^0}_{=1} \cdot (1-p)^{20} \leq 0{,}02 \;\Rightarrow (1-p)^{20} \leq 0{,}02 \;\Rightarrow 1 - p \leq 0{,}02^{\frac{1}{20}}$$

$$\Rightarrow p \geq 1 - 0{,}02^{\frac{1}{20}} = 0{,}17766$$

Der Anteil der weiblichen Echsen muss also **mindestens 18 %** betragen.

2 Bei einem 7- und einem 8-Bett-Zimmer und 12 Studierenden bleiben 3 Betten leer. Wenn in jedem Zimmer mindestens ein Bett leer bleiben soll, gibt es zwei Möglichkeiten: im kleineren Zimmer bleibt ein Bett frei und im größeren zwei oder umgekehrt. Für die Wahrscheinlichkeit dieses Ausschussproblems gilt dann:

$$P(E) = \frac{\binom{7}{1} \cdot \binom{8}{2} + \binom{7}{2} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{7 \cdot 28 + 21 \cdot 8}{455} = \frac{364}{455} = \underline{\underline{0{,}8 = 80\,\%}}$$

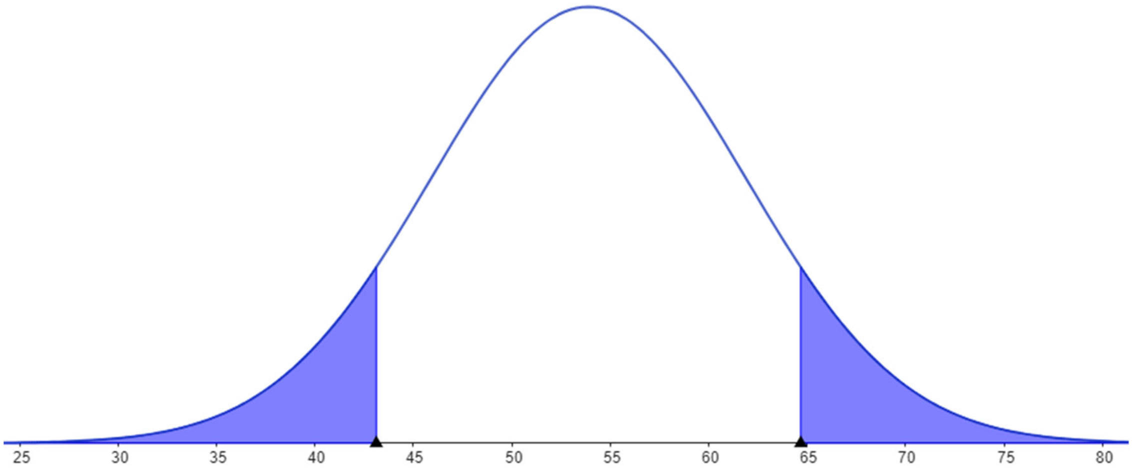
3 $\varphi(x) = \frac{1}{\underbrace{8}_{\sigma} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \overbrace{53{,}9}^{\mu}}{8}\right)^2}$

a) Aus der Dichtefunktion der Normalverteilung lässt sich ohne Umformung ablesen: $\mu = 53{,}9;\ \sigma = 8$

$P(Y < 48) \overset{TR}{=} \underline{\underline{0{,}23041 \approx 23{,}0\,\%}}$

b) $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = P(Y < x);\ \ \phi(0{,}8 \cdot 53{,}9) + 1 - \phi(1{,}2 \cdot 53{,}9)$

$$\phi(0{,}8 \cdot 53{,}9) + 1 - \phi(1{,}2 \cdot 53{,}9) = \phi(43{,}12) + 1 - \phi(64{,}68)$$
$$= P(X < 43{,}12) + P(X > 64{,}68)$$



Der Term stellt die Wahrscheinlichkeit dar, dass die Kopf-Rumpf-Länge der weiblichen Bergeidechsen um **mindestens 20 %** vom Erwartungswert abweicht.

c) $\mu_Z = 48$; $P(41 < Z < 55) \approx 0{,}683$

Gemäß Sigma-Regeln gilt: $P(|Z-\mu| < \sigma) = P(\mu - \sigma < Z < \mu + \sigma) \approx 0{,}683$

$\Rightarrow P(48 - \sigma_Z < Z < 48 + \sigma_Z) \approx 0{,}683 \;\Rightarrow \underline{\underline{\sigma_Z = 7 < \sigma_Y}}$

Der Graph der Dichtefunktion ist wegen des kleineren Erwartungswerts nach links verschoben. Außerdem ist er höher und steiler als der von Y.
Die Wendepunkte sind bei 41 und 55.