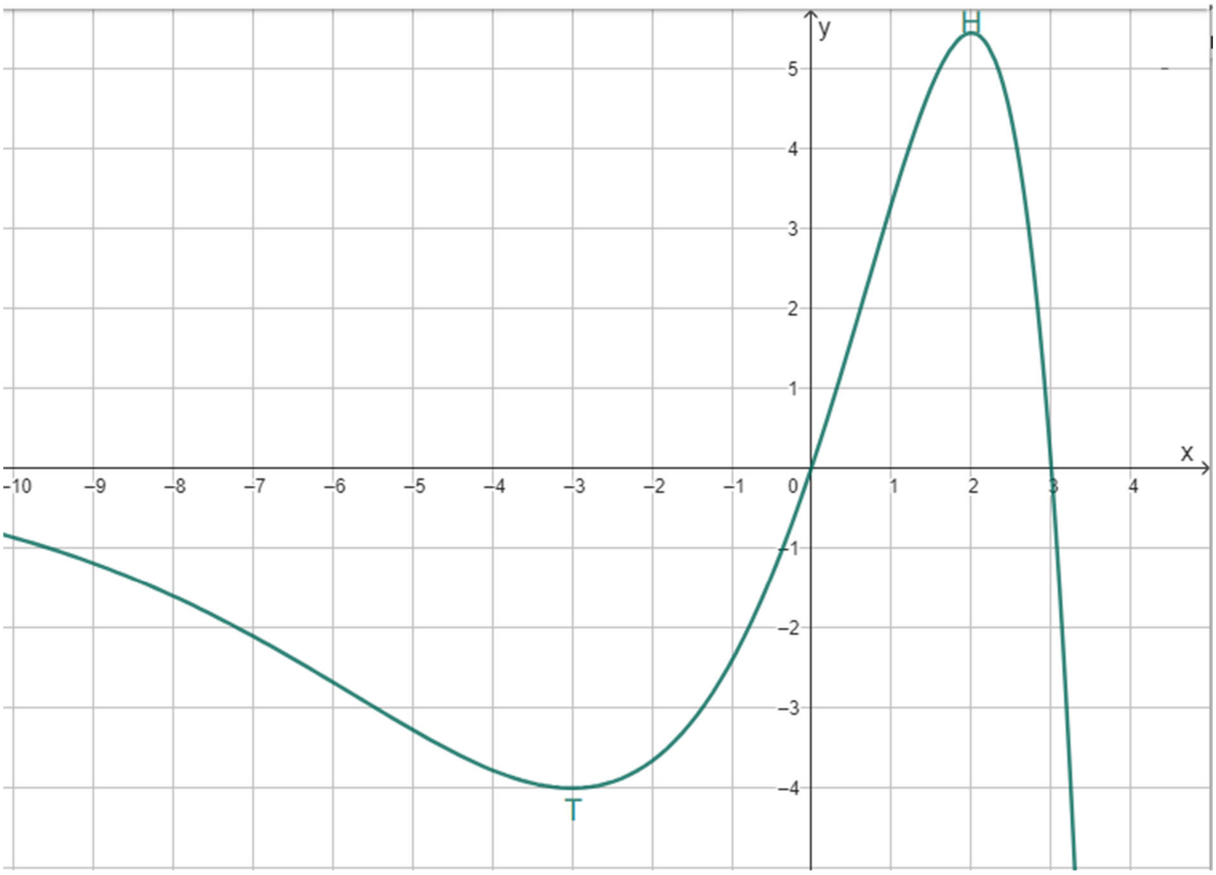
Analysis B1

$f(x) = (-x^2 + 3x) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$; $T\left(-3 / -18e^{-\frac{3}{2}}\right)$



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ die x-Achse ist im negativen Bereich des Graphen Asymptote.

Nullstellen

$\underline{f(x) = 0:}\ (-x^2 + 3x) \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow -x^2 + 3x = 0 \quad \Rightarrow x(-x+3) = 0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}};\ \underline{\underline{x_2 = 3}}$

b) Hochpunkt

$$f'(x) = (-2x+3)\cdot e^{\frac{1}{2}x} + (-x^2+3x)\cdot e^{\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{2} = e^{\frac{1}{2}x}\left(-2x+3+(-x^2+3x)\cdot\frac{1}{2}\right)$$
$$= e^{\frac{1}{2}x}\left(-2x+3-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x\right) = e^{\frac{1}{2}x}\left(-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+3\right)$$

$$\underline{f'(x)=0:}\ \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0}\left(-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+3\right)=0 \ \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+3=0 \ \Rightarrow x^2+x-6=0$$
$$\Rightarrow x_{1/2}' = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm 5}{2} \quad \Rightarrow x_1' = -3 = x_T;\ x_2' = 2$$

Aus dem Graphen ergibt sich, dass bei $x_2' = 2$ ein HOP vorliegen muss.

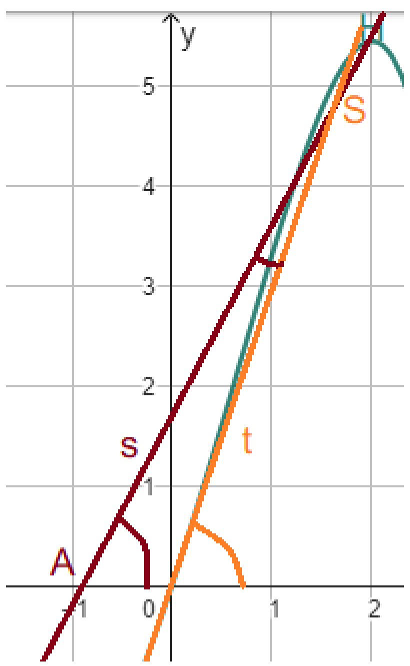
$$f(2) = (-2^2+3\cdot 2)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 2e \ \Rightarrow \underline{\underline{H(2/2e)}}$$

Wertemenge

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = (\underbrace{-x^2+3x}_{\to -\infty})\cdot\underbrace{e^{\overbrace{\frac{1}{2}x}^{\to\infty}}}_{\to\infty} = -\infty$$

H ist der einzige Hochpunkt. In Verbindung mit den beiden Grenzwerten (siehe a) ergibt sich: $\underline{\underline{W =]-\infty;2e]}}$

c)



Zunächst brauchen wir die Steigungen der beiden Geraden:

Für die Tangente gilt: $m_t = f'(0) = e^0\cdot 3 = 3$

Für die Gerade s durch T und H gilt:

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2e-\left(-18e^{-\frac{3}{2}}\right)}{2-(-3)} = \frac{2e+18e^{-\frac{3}{2}}}{5}$$

Zunächst berechnen wir die Winkel zwischen den Geraden und der x-Achse:

$\tan\varphi_1 = 3 \ \Rightarrow \varphi_1 \approx 71{,}57^0$

$$\tan\varphi_2 = \frac{2e+18e^{-\frac{3}{2}}}{5} \ \Rightarrow \varphi_2 \approx 62{,}12^0$$

Der gesuchte Winkel ergibt sich im Dreieck AOS:

$\varphi = 180^0 - \left(62{,}12^0 - (180^0 - 71{,}57^0)\right) = \underline{\underline{9{,}45^0}}$

d) Globales Maximum der 1. Ableitung

Die Ableitung ist maximal bzw. minimal in den Wendepunkten des Graphen von f. Der Graph von f steigt nur für $-3 < x < 2$. Im Wendepunkt in diesem Bereich ist daher die Steigung absolut am größten.

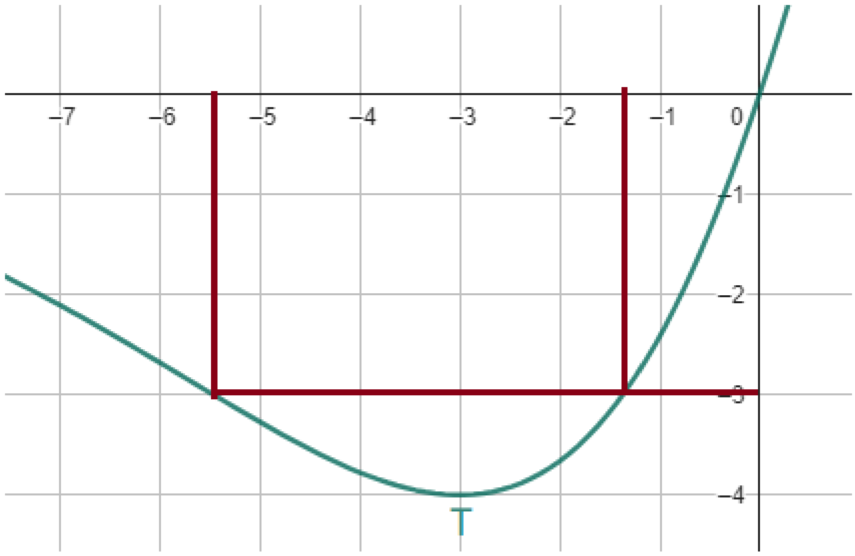
Zur Bestimmung dieses Wendepunkts geht man wie folgt vor:
$f''(x) = 0$ führt zu zwei Lösungen (beides einfache Nullstellen von f'').
Wir brauchen die größere der beiden Lösungen x_2''.
Das globale Maximum beträgt dann $f'(x_2'')$.

e) Interpretation des Hochpunkts

Da f die momentane Änderungsrate der in der Batterie gespeicherten Energie angibt, ist im HOP die Zunahme der gespeicherten Energie am größten.
Konkret: zwei Sekunden nach Bremsbeginn lädt sich die Batterie am stärksten auf, nämlich mit $2e \approx 5{,}4 \frac{\text{kJ}}{\text{s}}$.

f) Die Batterie soll mindestens $3 \frac{\text{kJ}}{\text{s}}$ verlieren. Es muss also gelten: $f(x) < -3$

Das Problem lösen wir graphisch:

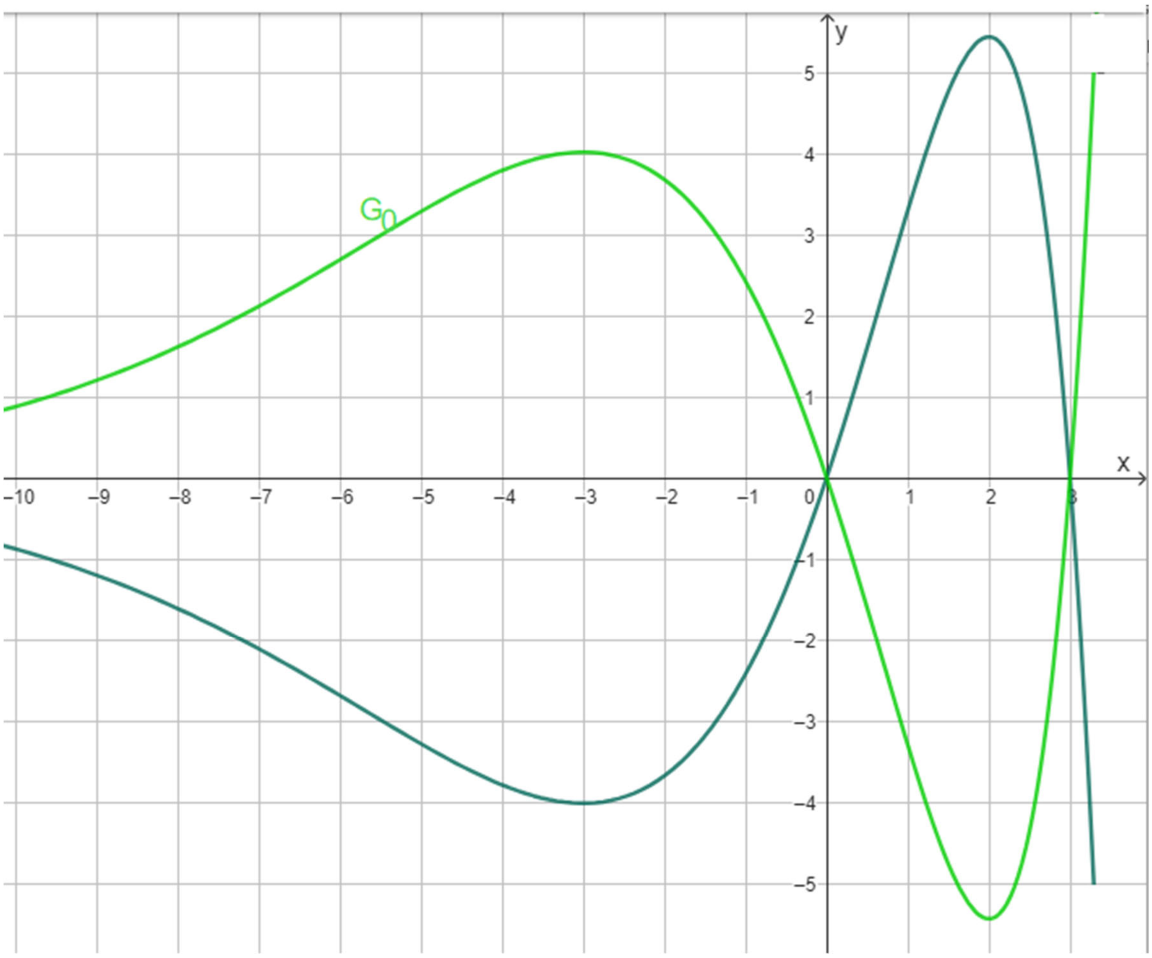


Das gesuchte Zeitintervall beträgt ca. 4 Sekunden.

g) $\int_{-10}^{3} f(x)dx \approx -15$

Das Integral gibt die Flächenbilanz zwischen Graph und x-Achse an.
Die Fläche ist der Ladezustand der Batterie. Im Beobachtungszeitraum verliert die Batterie also insgesamt 15 kJ.

h) $g_a(x) = -f(x) + a \ (a \in IR)$
$g_0(x) = -f(x)$
Der Graph von f wird an der x-Achse gespiegelt:



Für positives a gilt: der Graph G_0 wird um a Einheiten nach oben verschoben.

i) **zwei Schnittpunkte**

Verschiebt man G_0 nach oben, so gibt es so lange genau **zwei** Schnittpunkte, bis der TIP von G_a mit dem HOP von G_f zusammenfällt, also für $a = 2 \cdot 2e = 4e$.
In diesem Fall gibt es nur noch **einen** gemeinsamen Punkt, nämlich den Berührpunkt.

Verschiebt man G_0 nach unten, so gibt es so lange genau **drei** Schnittpunkte (zusätzlicher Schnittpunkt am linken Rand), bis der HOP von G_a mit dem TIP von G_f zusammenfällt, also für $a = 2 \cdot \left(-18e^{-\frac{3}{2}}\right) = -36e^{-\frac{3}{2}}$.

In diesem Fall gibt es einen Berührpunkt und einen weiteren Schnittpunkt am rechten Rand.

Für $a < -36e^{-\frac{3}{2}}$ gibt es nur noch einen Schnittpunkt am rechten Rand.

Zusammengefasst: zwei gemeinsame Punkte gibt es für $0 \le a < 4e$ und für $a = -36e^{-\frac{3}{2}}$.

j) $g_{a,b}(x) = -f(bx) + a$

Die Gerade $y = 2$ soll Asymptote sein. Diese wird daher im Verhältnis zu G_0 um 2 Einheiten nach oben verschoben. Daher gilt: $\underline{\underline{a = 2}}$

Der Faktor b bewirkt eine Streckung in x-Richtung um $\frac{1}{b}$. Der ursprüngliche TIP von G_0 liegt bei $x' = 2$ und soll durch die Streckung bei $x' = -0{,}5$ liegen.

Daher muss gelten: $2 \cdot \frac{1}{b} = -0{,}5 \ \Rightarrow 2 = -0{,}5b \ \Rightarrow \underline{\underline{b = -4}}$

