Stochastik

A3 $n=36;\ p=0{,}5$

a) $P(X=27)=\underline{\underline{\binom{36}{27}\cdot 0{,}5^{27}\cdot 0{,}5^{9}}}$

b) Zunächst berechnen wir den Erwartungswert und die Standardabweichung:

$\mu = n\cdot p = 36\cdot 0{,}5 = 18$

$\sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} = \sqrt{36\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5} = \sqrt{9} = 3$

$$\begin{aligned}P(\mu-0{,}5\sigma\le X\le \mu+0{,}5\sigma) &= P(18-0{,}5\cdot 3\le X\le 18+0{,}5\cdot 3)\ = P(16{,}5\le X\le 19{,}5)\\ &= P(17\le X\le 19)\ = P(X=17)+P(X=18)+P(X=19)\\ &\approx 0{,}125+0{,}13+0{,}125 = \underline{\underline{0{,}38}}\end{aligned}$$

Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten wurden aus dem Graphen abgelesen.

A7 Würfel A: 3-mal 3, 3-mal 5; Würfel B: 2-mal 1, 4-mal 4

a) Die Würfel werden zweimal gleichzeitig geworfen.
Bei einmaligem Werfen sind folgende Kombinationen möglich:

A/B	31	34	51	54
Augensumme	4	7	6	9
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

Bei zweimaligem Werfen gilt:

$$\begin{aligned}P(\text{"Augenzahl von A stets größer"}) &= \underbrace{P(\{31;51;54\})}_{\text{`1. Wurf}}\cdot\underbrace{P(\{31;51;54\})}_{\text{`2. Wurf}}\\ &= \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{4}{9}}}\end{aligned}$$

b) $P(\text{"vier unterschiedliche Augensummen"}) = v\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^w\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$

Es geht um die Wahrscheinlichkeit, dass bei 4-maligem Werfen alle Augensummen unterschiedlich sind. Das ist der Fall, wenn jede Summe genau einmal kommt.
Für den Fall 31, 34, 51, 54 (in dieser Reihenfolge) gilt für die Wahrscheinlichkeit:

$P(\text{"31,34,51,54"}) = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}_{31}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \underline{\underline{w=4}}$

Die Reihenfolge kann aber noch vertauscht werden und zwar auf $4! = 24$ Arten.
$\Rightarrow \underline{\underline{v=24}}$

A8 Von 5 Kugeln sind 3 mit a und 2 mit b beschriftet. 2 Kugeln werden gleichzeitig entnommen. Außerdem gilt: $a+b=17$

a) $1-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$

Zwar werden die Kugeln gleichzeitig gezogen, die Wahrscheinlichkeiten können aber ebenso mit dem Modell „nacheinander Ziehen ohne Zurücklegen“ berechnet werden.

$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$: das ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln mit b beschriftet sind

$1-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$: das ist das Gegenereignis, also die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Kugel mit a beschriftet ist

b) X = Summe der Zahlen
$E(X)=16$

x	$2a$	17	$2b=2(17-a)=34-2a$
$P(X=x)$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}=0{,}3$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=0{,}6$	$1-(0{,}3+0{,}6)=0{,}1$

Mit dem Erwartungswert ergibt sich:
$2a\cdot 0{,}3+17\cdot 0{,}6+(34-2a)\cdot 0{,}1=16 \quad\Rightarrow 0{,}6a+10{,}2+3{,}4-0{,}2a=16$
$\Rightarrow 0{,}4a+13{,}6=16 \quad\Rightarrow 0{,}4a=2{,}4 \quad\Rightarrow \underline{\underline{a=6}} \quad\Rightarrow b=17-6 \;\Rightarrow \underline{\underline{b=11}}$

