

Geometrie

$$\text{A4 } g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; E: -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2 = 0$$

- a) Der Normalenvektor der Ebene E ist identisch mit dem Richtungsvektor der Geraden g. Daher steht g auf E senkrecht.

Einsetzen des Punktes P(-4 / 2 / -2) in E ergibt:

$$-2 \cdot (-4) - 2 + 2 \cdot (-2) - 2 = 8 - 2 - 4 - 2 = 0 \Rightarrow P \in E$$

- b) Punkt Q auf g mit Abstand 12 zu E

Zunächst berechnen wir die Länge des Richtungsvektors von g:

$$\left| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

Ausgehend vom Aufpunkt der Gerade brauchen wir den Richtungsvektor also 4 mal, um auf den Abstand 12 zu kommen:

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{Q(-12 / -2 / 6)}}$$

Hinweis: Ein weiterer Punkt ergibt sich für $\lambda = -4$.

A9 $E: 3x_1 - 4x_2 + 12x_3 - 130 = 0$

a) Abstand der Ebene E von 0

Wir bilden zunächst eine Hilfsgerade I mit 0 als Aufpunkt und dem Normalenvektor von E als Richtungsvektor. Diese schneiden wir mit E und bekommen so den Lotfußpunkt L. Der gesuchte Abstand ist dann $|\overline{OL}|$.

$$I: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$I \text{ in } E: 3 \cdot 3\lambda - 4 \cdot (-4\lambda) + 12 \cdot 12\lambda - 130 = 0 \Rightarrow 9\lambda + 16\lambda + 144\lambda - 130 = 0 \\ \Rightarrow 169\lambda = 130 \Rightarrow \lambda = \frac{130}{169} = \frac{10}{13}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{10}{13} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{OL} = \frac{10}{13} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$|\overline{OL}| = \sqrt{\left(\frac{10}{13}\right)^2 \cdot (3^2 + (-4)^2 + 12^2)} = \frac{10}{13} \cdot 13 = \underline{\underline{10}}$$

Hinweis: eine Lösung mit der HNF (falls bekannt) ist auch gut möglich.

b) Wir bilden zunächst eine Hilfsebene H durch 0, die parallel zu E verläuft:

$$H: 3x_1 - 4x_2 + 12x_3 = 0$$

Jeder Punkt in H hat von E den Abstand 10.

$$\text{Außerdem muss gelten: } |\overline{OP}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 10 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 100$$

Wir setzen z.B. $x_3 = 0$. Dann ergibt sich:

$$I \quad 3x_1 - 4x_2 = 0 \Rightarrow 3x_1 = 4x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{3}x_2$$

$$II \quad x_1^2 + x_2^2 = 100$$

$$I \text{ in } II \quad \left(\frac{4}{3}x_2\right)^2 + x_2^2 = 100 \Rightarrow \frac{16}{9}x_2^2 + x_2^2 = 100 \Rightarrow \frac{25}{9}x_2^2 = 100$$

$$\Rightarrow x_2^2 = \frac{100 \cdot 9}{25} \Rightarrow x_2^2 = 36 \Rightarrow x_2 = \pm 6$$

$$x_2 = 6 \text{ in } I \quad x_1 = \frac{4}{3} \cdot 6 = 8 \Rightarrow \underline{\underline{P(8/6/0)}}$$

Hinweis: ein weiterer Punkt ergibt sich für $x_2 = -6$.

A10 $A(0/0/0)$; $B_s(4s/3s/0)$; $C_t(0/0/t)$; $s, t \in \mathbb{R}^+$

a) rechter Winkel bei A

$$\overrightarrow{AB_s} = \begin{pmatrix} 4s \\ 3s \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB_s} \circ \overrightarrow{AC_t} = \begin{pmatrix} 4s \\ 3s \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$$

Das Dreieck AB_sC_t hat daher für alle s, t einen rechten Winkel bei A.

b) Die Gleichung der zweidimensionalen Ursprungsgerade lässt sich mithilfe des Steigungsdreiecks bestimmen: $t = 5s$

Außerdem soll das Dreieck gleichschenkelig sein:

$$|\overrightarrow{AB_s}| = |\overrightarrow{AC_t}| \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 4s \\ 3s \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \right| \Rightarrow \sqrt{(4s)^2 + (3s)^2} = \sqrt{t^2} \Rightarrow \sqrt{16s^2 + 9s^2} = t$$

$$\Rightarrow \sqrt{25s^2} = t \Rightarrow 5s = t$$

Das ist genau die Gleichung der Geraden. Daher liegt $(s; t)$ bei Gleichschenkligkeit des Dreiecks auf der Geraden.