Analysis II

1.1 Grenzwerte

Wegen des negativen Leitkoeffizienten gilt: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \underline{\underline{-\infty}}$

1.2 waagrechte Tangenten

$$f'(x) = -\frac{1}{8}(4x^3 - 12x + 8); \quad f''(x) = -\frac{1}{8}(12x^2 - 12)$$

$$\underline{f(x) = 0}: \; -\frac{1}{8}(4x^3 - 12x + 8) = 0 \quad \Rightarrow 4x^3 - 12x + 8 = 0$$

Mit dem Taschenrechner ergibt sich: $x_1' = 1$

$$(4x^3 - 12x + 8) : (x - 1) = 4x^2 + 4x - 8$$
$$\underline{-(4x^3 - 4x^2)}$$
$$4x^2 - 12x$$
$$\underline{-(4x^2 - 4x)}$$
$$-8x + 8$$
$$\underline{-(-8x + 8)}$$
$$0$$

$$4x^2 + 4x - 8 = 0 \Rightarrow x_{2/3}' = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-8)}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 \pm 12}{8}$$

$$\Rightarrow x_2' = -2; \; x_3' = 1 = x_1'$$

Bei der doppelten Nullstelle der 1. Ableitung $x_1' = 1$ hat der Graph von f einen Terrassenpunkt.

$$f(1) = -\frac{1}{8}(1 - 6 + 8) = -\frac{3}{8} = -0{,}375 \;\Rightarrow \underline{\underline{TER(1/-0{,}375)}}$$

$$f(-2) = -\frac{1}{8}(16 - 24 - 16) = \frac{24}{8} = 3;$$

$$f''(-2) = -\frac{1}{8}(48 - 12) < 0 \;\Rightarrow \underline{\underline{HOP(-2/3)}}$$

 © Marcus ter Haerst

1.3 Wendepunkte

$$\underline{f''(x)=0}: \; -\frac{1}{8}(12x^2-12)=0 \;\Rightarrow 12x^2-12=0 \;\Rightarrow 12x^2=12 \;\Rightarrow x^2=1$$

$$\Rightarrow x_{1/2}=\pm 1$$

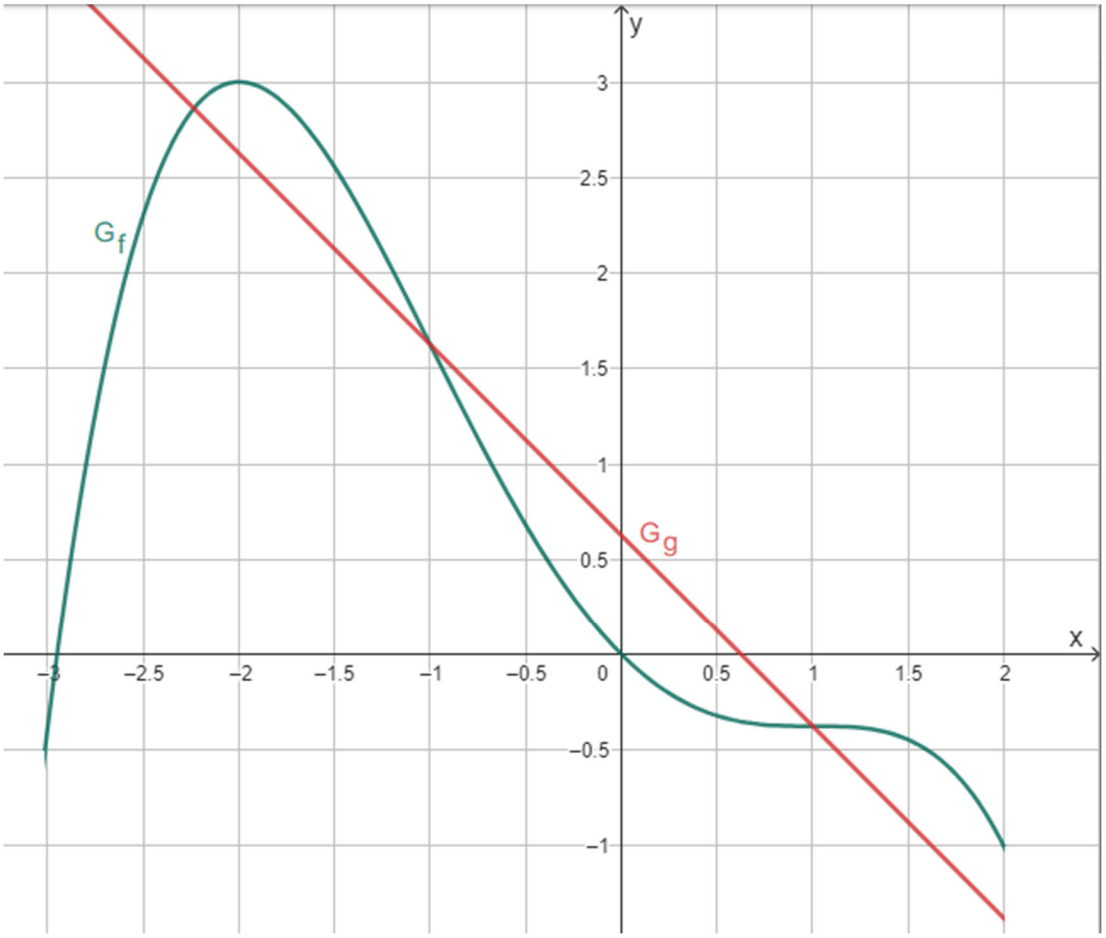
Beides sind einfache Nullstellen der 2. Ableitung. Daher liegt an beiden Stellen ein Wendepunkt vor. Einer ist der Terrassenpunkt von 1.2.

$$f(-1)=-\frac{1}{8}(1-6-8)=\frac{13}{8}=1{,}625 \quad \Rightarrow WEP_1(-1/1{,}625);\; WEP_2(1/-0{,}375)$$

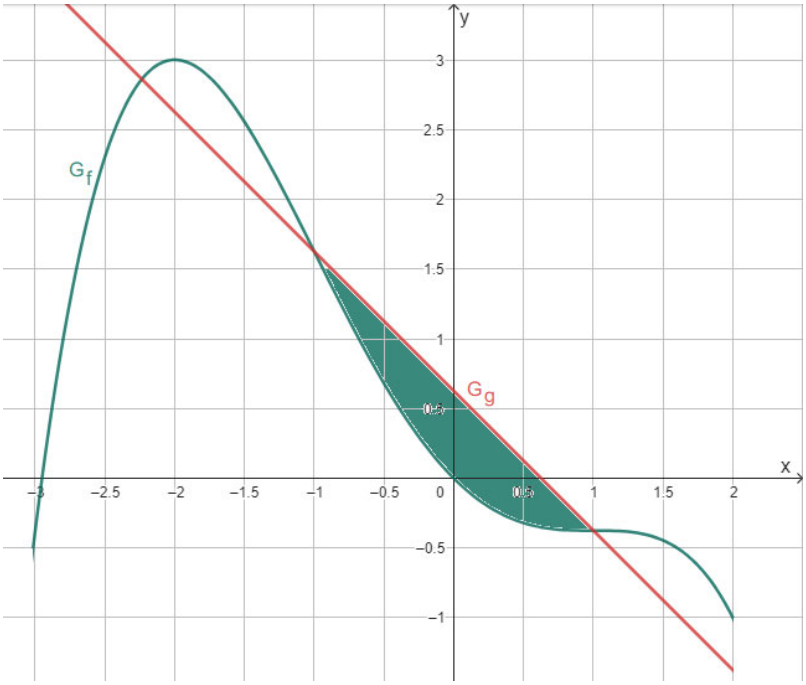
$$g(-1)=1+\frac{5}{8}=1{,}625=y_{WEP_1};\quad g(1)=-1+\frac{5}{8}=-0{,}375=y_{WEP_2}$$

Die Gerade g verläuft somit durch die beiden Wendepunkte von G_f.

1.4



1.5



Zu berechnen ist die „Wurstfläche“ zwischen den beiden Graphen:

$$\int_{-1}^{1} g(x)-f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} -x+\frac{5}{8}-\left(-\frac{1}{8}(x^4-6x^2+8x)\right)dx = \int_{-1}^{1} -x+\frac{5}{8}+\frac{1}{8}(x^4-6x^2+8x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} -x+\frac{5}{8}+\frac{1}{8}x^4-\frac{3}{4}x^2+x\;dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{8}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{8}dx$$

$$= \left[\frac{1}{8}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{3}{4}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{5}{8}x\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{x^5}{40}-\frac{x^3}{4}+\frac{5}{8}x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left[\frac{1}{40}-\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\right]-\left[-\frac{1}{40}+\frac{1}{4}-\frac{5}{8}\right]$$

$$= 0{,}4-(-0{,}4) = 0{,}8$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A = 0{,}8}}$$

 © Marcus ter Haerst

2.1 Langfristige Temperatur

$$\lim_{t\to\infty} 36{,}5 + \underbrace{2t \cdot \underbrace{e^{\overbrace{-0{,}25t}^{\to-\infty}}}_{\to 0}}_{\to 0} = 36{,}5$$

Langfristig stellt sich eine Temperatur von 36,5 ^{0}C ein (wie zu Beginn der Symptome).

2.2 Maximale Körpertemperatur

Für die Ableitung brauchen wir die Produkt- und die Kettenregel:

$$\dot{T}(t) = 2 \cdot e^{-0{,}25t} + 2t \cdot e^{-0{,}25t} \cdot (-0{,}25) = e^{-0{,}25t} \cdot \left(2 + 2t \cdot (-0{,}25)\right)$$
$$= e^{-0{,}25t} \cdot \left(2 - 0{,}5t\right)$$

$$\underline{\dot{T}(t) = 0}: \ \underbrace{e^{-0{,}25t}}_{\neq 0} \cdot \left(2 - 0{,}5t\right) = 0 \quad \Rightarrow 2 - 0{,}5t = 0 \quad \Rightarrow 0{,}5t = 2 \quad \Rightarrow t' = 4$$

$$T(4) = 36{,}5 + 8 \cdot e^{-1} \approx 39{,}4$$

Da dieser Wert größer als der Startwert ist, handelt es sich um ein relatives Maximum. Und da es der einzige Extremwert im Definitionsbereich ist, ist es ein absolutes Maximum. Die höchste Körpertemperatur, die die Person erreicht, beträgt also 39,4 ^{0}C.

Hinweis: Die Art des relativen Extremums kann auch mit einer Monotonietabelle oder auch mit der 2. Ableitung begründet werden.

 © Marcus ter Haerst

3.1 Volumen

Zunächst muss in der Volumenformel r durch h ersetzt werden. Dies erreichen wir in dem rechtwinkligen Dreieck mit dem Satz des Pythagoras:

$$h^2+(2r)^2=\underbrace{25}_{s}{}^2 \Rightarrow h^2+4r^2=625 \Rightarrow 4r^2=625-h^2 \Rightarrow r^2=\frac{625}{4}-\frac{1}{4}h^2$$

Einsetzen in die gegebene Volumenformel ergibt:

$$V(h)=\frac{13}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{625}{4}-\frac{1}{4}h^2\right)\cdot h=\frac{13}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{625}{4}h-\frac{1}{4}h^3\right)=\underline{\underline{\frac{13}{12}\cdot\pi\cdot\left(625h-h^3\right)}}$$

3.2 Maximales Volumen

$$V'(h)=\frac{13}{12}\cdot\pi\cdot\left(625-3h^2\right);\ V''(h)=\frac{13}{12}\cdot\pi\cdot(-6h)$$

$$\underline{\underline{V'(h)=0}}:\ \frac{13}{12}\cdot\pi\cdot\left(625-3h^2\right)=0 \Rightarrow 625-3h^2=0 \Rightarrow 3h^2=625$$

$$\Rightarrow h^2=\frac{625}{3} \Rightarrow h=\frac{25}{\sqrt{3}}=\underline{\underline{\frac{25}{3}\cdot\sqrt{3}}}\ (\approx 14{,}4)$$

Die negative Lösung muss nicht berücksichtigt werden, da die Höhe nicht negativ sein kann. Wegen $14{,}4\notin[15;23]$ ist der positive Wert allerdings auch nicht definiert. Das absolute Maximum kann also nur an den Rändern des Definitionsbereichs liegen.

$$V(15)=\frac{13}{12}\cdot\pi\cdot\left(625\cdot 15-15^3\right)=\frac{13}{12}\cdot\pi\cdot 6000=\frac{78000}{12}\cdot\pi=6500\cdot\pi$$

$$V(23)=\frac{13}{12}\cdot\pi\cdot\left(625\cdot 23-23^3\right)=\frac{13}{12}\cdot\pi\cdot 2208=\frac{28704}{12}\cdot\pi=2392\cdot\pi$$

Das maximale Volumen ergibt sich also für $h=15\ \text{cm}$.

Es beträgt $6500\cdot\pi\approx 20420{,}4\ \text{cm}^3$.

Für den oberen Durchmesser gilt dann:

$$D=2R=6r=6\cdot\sqrt{\frac{625}{4}-\frac{1}{4}\cdot 15^2}=6\cdot\sqrt{\frac{625}{4}-\frac{225}{4}}=6\cdot\sqrt{\frac{400}{4}}=6\cdot\sqrt{100}=\underline{\underline{60}}$$

Der obere Durchmesser des Pflanzgefäßes beträgt **60 cm**.

 © Marcus ter Haerst