Analysis I

1.1 Nullstellen

$\underline{f(x)=0}$: $\frac{1}{14}\left(x^3-12x^2+36x+49\right)=0 \quad \Rightarrow x^3-12x^2+36x+49=0$

Mit dem Taschenrechner ergibt sich: $\underline{\underline{x_1=-1}}$

$$
\begin{array}{l}
(x^3-12x^2+36x+49):(x+1)=x^2-13x+49 \\
\underline{-(x^3+x^2)} \\
\quad -13x^2+36x \\
\quad \underline{-(-13x^2-13x)} \\
\qquad\qquad 49x+49 \\
\qquad\qquad \underline{-(49x+49)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$x^2-13x+49=0 \Rightarrow x_{2/3}=\frac{13\pm\sqrt{13^2-4\cdot1\cdot49}}{2\cdot1}=\frac{13\pm\sqrt{-27}}{2}$$

Dies ist ein Widerspruch. Es gibt daher keine weitere Nullstelle.

1.2 Relative Extrempunkte

$f'(x)=\frac{1}{14}\left(3x^2-24x+36\right); \quad f''(x)=\frac{1}{14}(6x-24)$

$\underline{f'(x)=0}$: $3x^2-24x+36=0 \quad \Rightarrow -2x(x^2+3x+2)=0 \Rightarrow x_1'=0$

$$\Rightarrow x_{1/2}'=\frac{24\pm\sqrt{24^2-4\cdot3\cdot36}}{2\cdot3}=\frac{24\pm12}{6}$$

$\Rightarrow x_1'=2;\ x_2'=6$

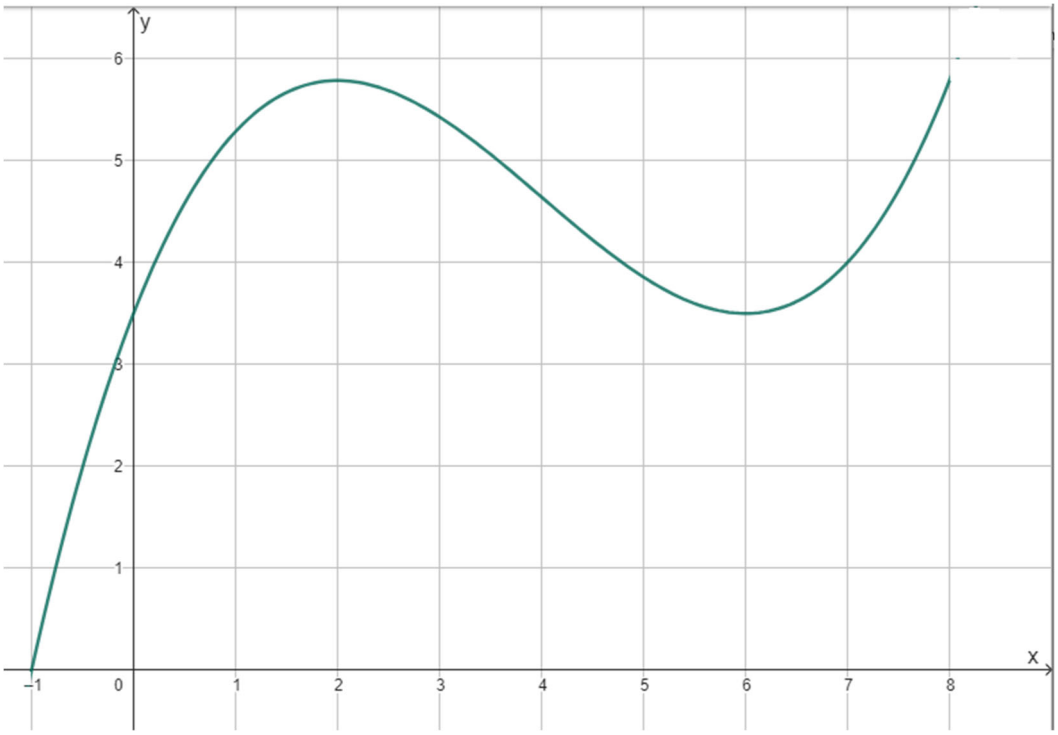
$$f(2)=\frac{1}{14}\left(2^3-12\cdot2^2+36\cdot2+49\right)=\frac{81}{14};$$

$$f''(2)\approx-0{,}86<0 \Rightarrow \underline{\underline{HOP\left(2/\frac{81}{14}\right)}}$$

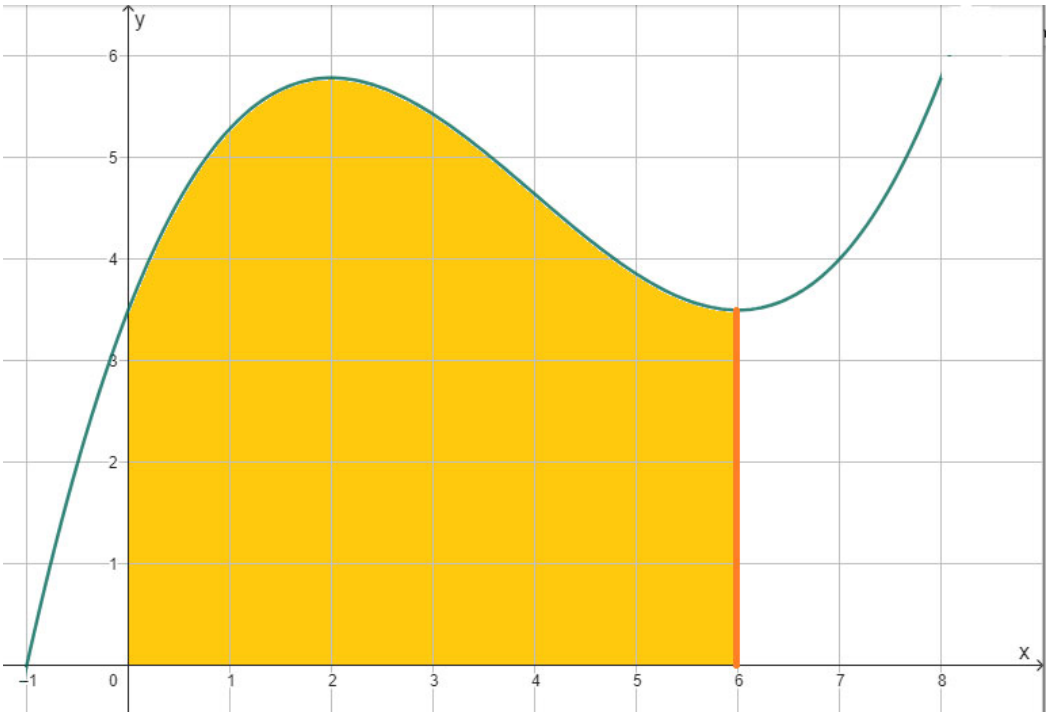
$$f(6)=3{,}5;\quad f''(6)\approx0{,}86>0 \Rightarrow \underline{\underline{TIP(6/3{,}5)}}$$

 © Marcus ter Haerst

1.3



1.4



 © Marcus ter Haerst

$$\int_0^6 f(x)dx = \int_0^6 \frac{1}{14}\left(x^3 - 12x^2 + 36x + 49\right)dx$$

$$= \frac{1}{14}\left[\frac{x^4}{4} - 12\cdot\frac{x^3}{3} + 36\cdot\frac{x^2}{2} + 49x\right]_0^6$$

$$= \frac{1}{14}\left[\frac{x^4}{4} - 4x^3 + 18x^2 + 49x\right]_0^6$$

$$= \frac{1}{14}\left[\frac{6^4}{4} - 4\cdot 6^3 + 18\cdot 6^2 + 49\cdot 6 - 0\right]_0^6 \approx 28{,}7 \Rightarrow \underline{\underline{A = 28{,}7}}$$

2.1 Bestimmung der Parameter

Aus den drei Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen ergibt sich ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen:

$\underline{h(0) = -1}$: $(a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c)\cdot \underbrace{e^0}_{=1} = -1 \quad \Rightarrow \underline{\underline{c = -1}}$ (I)

$\underline{h(-1) = 0}$: $(a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c)\cdot e^{-1} = 0 \quad \Rightarrow (a - b + c)\cdot \underbrace{e^{-1}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow a - b + c = 0$ (II)

$\underline{h(2) = 0}$: $(a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c)\cdot e^2 = 0 \quad \Rightarrow (4a + 2b + c)\cdot \underbrace{e^2}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow 4a + 2b + c = 0$ (III)

I in II: $a - b - 1 = 0 \quad \Rightarrow a = b + 1$ (II')

I und II‘ in III: $4(b+1) + 2b - 1 = 0 \quad \Rightarrow 4b + 4 + 2b - 1 = 0 \quad \Rightarrow 6b = -3 \quad \Rightarrow \underline{\underline{b = -\frac{1}{2}}}$ (III')

III‘ in II‘: $a = -\frac{1}{2} + 1 \Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{1}{2}}}$

2.2 Geometrische Deutung

Die Maßzahl der Fläche, die der Graph von h im IV. Quadranten mit den Koordinatenachsen einschließt, beträgt etwa 4,19.

 © Marcus ter Haerst

3.1 $N(0) = \underbrace{2 \cdot 0^2 \cdot e^{0-0,2}}_{=0} + 5 = 5$

$N(5) = 2 \cdot 5^2 \cdot e^{-0,125 \cdot 5 - 0,2} + 5 = 50 \cdot e^{-0,825} + 5 \approx 26,912$

Zu Beobachtungsbeginn waren 5 000 Bienen, nach 5 Wochen 26 912 Bienen in der Population.

3.2 Maximum

Für die Ableitung brauchen wir die Produkt- und die Kettenregel:

$$\dot{N}(t) = 2 \cdot 2t \cdot e^{-0,125t-0,2} + 2t^2 \cdot e^{-0,125t-0,2} \cdot (-0,125)$$
$$= e^{-0,125t-0,2}\left(2 \cdot 2t + 2t^2 \cdot (-0,125)\right) = e^{-0,125t-0,2}\left(4t - 0,25t^2\right)$$

$$\underline{\dot{N}(t) = 0}: \ \underbrace{e^{-0,125t-0,2}}_{\neq 0}\left(4t - 0,25t^2\right) = 0 \quad \Rightarrow 4t - 0,25t^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4t(1 - 0,0625t) = 0 \quad \Rightarrow t_1 = 0$$

$$1 - 0,0625t = 0 \quad \Rightarrow 0,0625t = 1 \quad \Rightarrow t_2 = 16$$

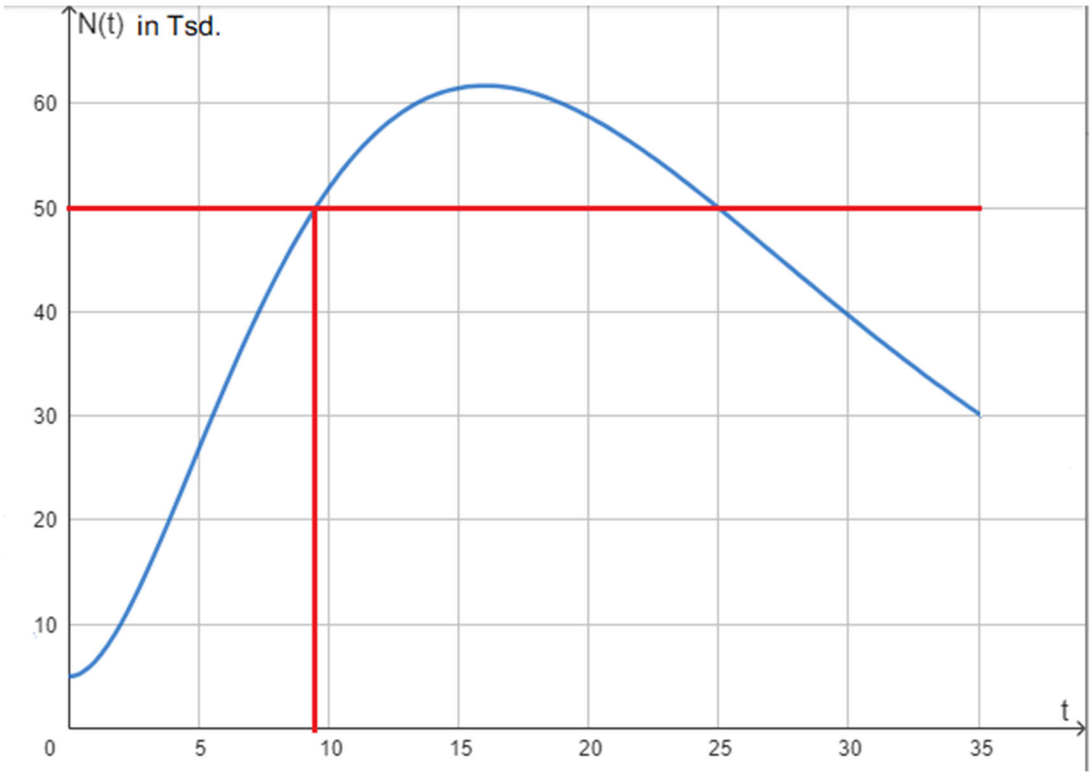
Da der Bestand von Beginn an zunimmt (vgl. 3.1), kommt $t_1 = 0$ für das Maximum nicht in Betracht. Daher liegt bei $t_2 = 16$ ein relatives Maximum vor. Da es rechts davon keinen weiteren Extrempunkt gibt (Tiefpunkt wäre notwendig), kann der Bienenbestand für $t > 16$ nicht wieder zunehmen. Das relative ist also auch das absolute Maximum. Nach 16 Wochen ist der Bienenbestand maximal.

$N(16) = 2 \cdot 16^2 \cdot e^{-0,125 \cdot 16 - 0,2} + 5 \approx 61,731$

Maximal gibt es in dem Volk **61 731** Bienen.

 © Marcus ter Haerst

3.3



Nach ca. **9 Wochen** erreicht die Anzahl der Bienen im Volk erstmals 50 000.
Das ist Anfang Mai.

3.4 Interpretation

Nach 4,7 Wochen nimmt die Anzahl der Bienen am stärksten zu und zwar um 6 040 Bienen pro Woche.

 © Marcus ter Haerst