Analysis Aufgabengruppe 2

1 $f(x)=\frac{4}{1+e^x}$

a) Nullstelle

Ein Bruch ist nur dann null, wenn sein Zähler null ist. Dieser ist hier immer 4.

Daher hat f keine Nullstelle.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{1+\underbrace{e^{\overset{\to-\infty}{x}}}_{\to 0}}=\underline{\underline{4}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{1+\underbrace{e^{\overset{\to\infty}{x}}}_{\to\infty}}="\frac{4}{\infty}"=\underline{\underline{0}}$$

Hinweis: Die Begründung ist hier entbehrlich. Ebenso gut kann man die Grenzwerte aus dem Graphen ablesen (auch ohne Begründung).

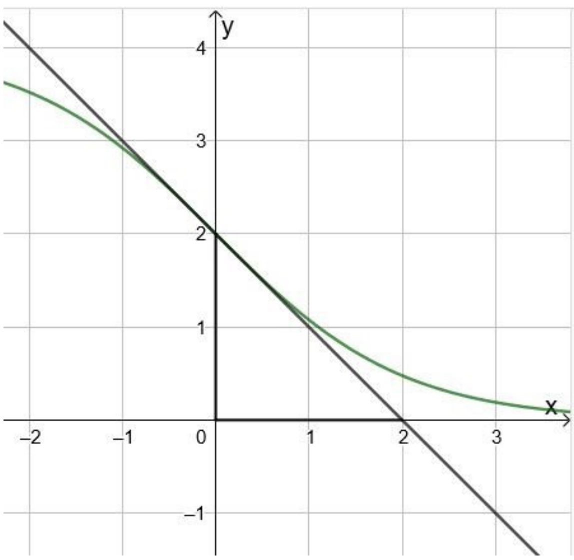
b) Mittlere Steigung

Die Ableitung ergibt sich z.B. mit der Quotientenregel:

$$f'(x)=\frac{(1+e^x)\cdot 0-4\cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^2}=\frac{-4\cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$$

$$f'(-1)=\frac{-4\cdot e^{-1}}{\left(1+e^{-1}\right)^2};\quad f'(1)=\frac{-4\cdot e^{1}}{\left(1+e^{1}\right)^2}$$

Für die mittlere Steigung ergibt sich: $\dfrac{\frac{-4\cdot e^{-1}}{\left(1+e^{-1}\right)^2}+\frac{-4\cdot e^{1}}{\left(1+e^{1}\right)^2}}{2}\approx \underline{\underline{-0{,}79}}$



$\underline{\underline{m_W=-1}}$

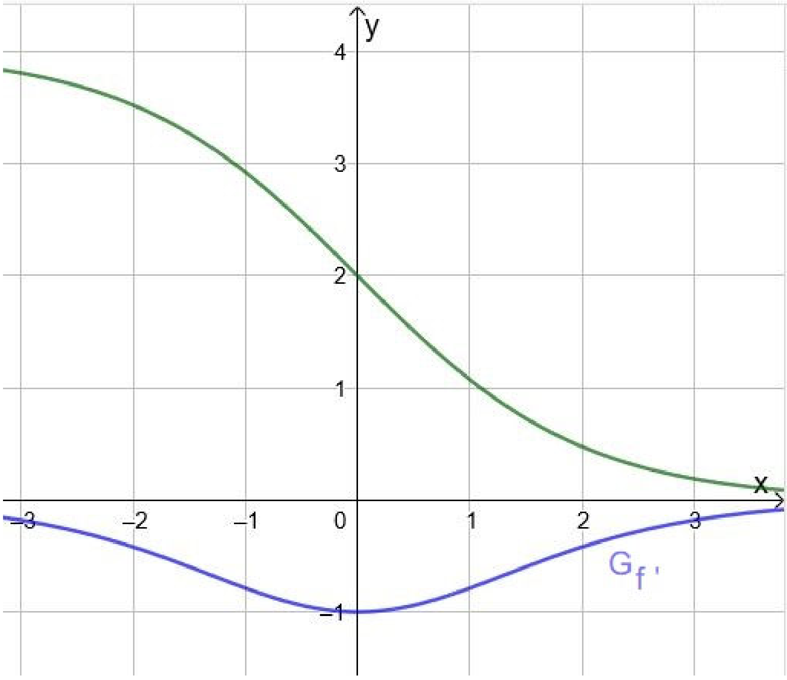
c) $f'(-x) = f'(x)$

Der Graph der Ableitung ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Außerdem gilt: $f'(0) = -1$ (vgl. b)

Dort liegt ein TIP der Ableitung vor, da f an der Stelle einen Wendepunkt hat (stärkstes Gefälle).

Wegen der waagrechten Asymptote des Graphen von f für sehr große x, ist die x-Achse auch Asymptote des Graphen der Ableitung.



d) $F(x) = 4x - 4 \cdot \ln\left(e^x + 1\right)$

$$F'(x) = 4 - 4 \cdot \frac{1}{e^x + 1} \cdot e^x = 4 - \frac{4e^x}{e^x + 1} = \frac{4(e^x + 1) - 4e^x}{e^x + 1} = \frac{4}{e^x + 1} = f(x)$$

F ist somit Stammfunktion von f.

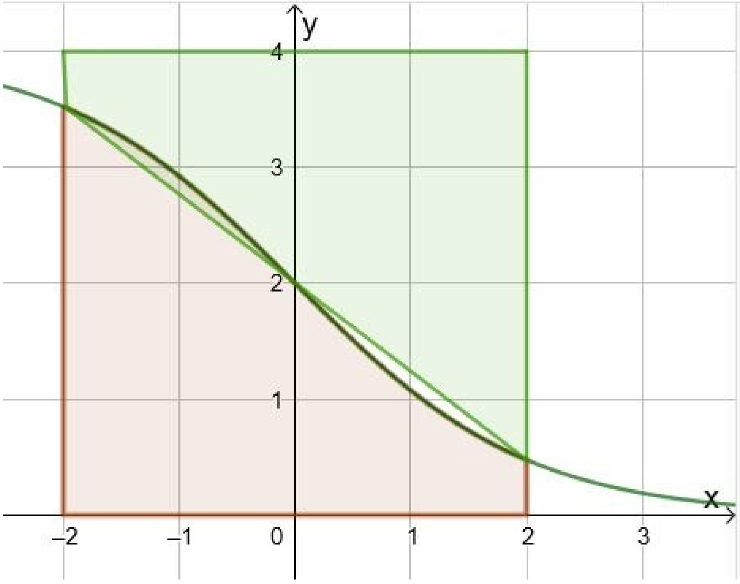
e) Da f die 1. Ableitung von F ist und diese stets positiv ist, ist der Graph von F streng monoton steigend. Die 2. Ableitung von F (f') ist immer negativ (vgl. c). Daher ist der Graph von F immer rechtsgekrümmt und hat somit für große x eine waagrechte Asymptote.

Für große x gilt näherungsweise:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} 4x - 4 \cdot \ln\left(e^x + 1\right) = \lim_{x\to\infty} 4x - 4 \cdot \ln\left(e^x\right) = \lim_{x\to\infty} 4x - 4 \cdot x \cdot \underbrace{\ln\left(e\right)}_{=1} = \lim_{x\to\infty} 0 = 0$$

Die x-Achse ist also waagrechte Asymptote von F für große x.
Der Graph von F läuft daher stets unterhalb der x-Achse. Die Aussage ist also **wahr**.

f) Wegen der Symmetrie zum Wendepunkt ergibt sich z.B. für $k = 2$ folgendes Bild:



Der Wert des Integrals $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ beträgt genau die Hälfte der Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen 4 und 4, also 8.

Für $k = 1$ hat das Rechteck die Seitenlängen 2 und 4 und somit die Fläche 8. Das Integral hat entsprechend den Wert 4.

Allgemein hat das Integral den Wert **4k**.

2 $w_{a,b,c}(x) = \dfrac{a}{b + e^{cx}}$

a) $\underline{c = 0}$: $w_{a,b,0}(x) = \dfrac{a}{b + e^0} = \dfrac{a}{b+1}$

Dieser Wert ist konstant. Der Graph ist somit eine waagrechte Gerade und damit gehört Graph I zu $c = 0$.

$\underline{c = 1}$: $\lim\limits_{x\to\infty} w_{a,b,1}(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a}{\underbrace{b + e^x}_{\to\infty}} = "\dfrac{a}{\infty}" = 0$

Zu $c = 1$ gehört daher Graph II.

Für den Fall $c = -1$ bleibt somit Graph III.

b) $w(x) = \dfrac{40}{1 + e^{-0,2x}}$

$w(0) = \dfrac{40}{1 + e^0} = \dfrac{40}{2} = 20$

Es wurden 20 Seeadler angesiedelt.

$\underline{w(x) = 32:}$ $\dfrac{40}{1 + e^{-0,2x}} = 32 \quad \Rightarrow 40 = 32(1 + e^{-0,2x}) \quad \Rightarrow 1 + e^{-0,2x} = \dfrac{40}{32}$

$\Rightarrow e^{-0,2x} = 0,25 \quad \Rightarrow -0,2x = \ln 0,25 \quad \Rightarrow x = \dfrac{\ln 0,25}{-0,2} = 6,93147...$

Nach knapp sieben Jahren ist die Anzahl der Seeadler auf 32 angewachsen.

c) Die Tangente lässt sich aus der gegebenen Steigung und dem Punkt (0/20) (vgl. b) leicht aufstellen durch Einsetzen in die allg. Geradengleichung:

$20 = 2 \cdot 0 + t \;\Rightarrow t = 20 \;\Rightarrow t(x) = 2x + 20$

$t(4) = 2 \cdot 4 + 20 = 28$

$w(4) = \dfrac{40}{1 + e^{-0,2 \cdot 4}} = \dfrac{40}{1 + e^{-0,8}} = 27,5989...$

Bei beiden Graphen ergibt sich zum Zeitpunkt vier Jahre nach Ansiedlung in etwa der gleiche Wert.

d) (1) $\dfrac{a}{b+1} = 20 \Leftarrow \dfrac{a}{b + e^0} = 20$: Es wurden 20 Seeadler neu angesiedelt.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a}{b + e^{cx}} = 45$: Auf lange Sicht werden 45 Seeadler auf der Inselgruppe leben.

(3) $\dfrac{a}{b + e^{15c}} = 35$: Nach 15 Jahren leben 35 Seeadler auf der Inselgruppe.

e) Wegen 2a) hat der Graph in etwa den Verlauf von Abb. III (negatives c).
Die waagrechte Asymptote liegt wegen (2) bei 45.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a}{b+\underbrace{e^{cx}}_{\to 0}} = 45 \Rightarrow \dfrac{a}{b} = 45 \Rightarrow a = 45b$ (2')

in (1): $\dfrac{45b}{b+1} = 20 \Rightarrow 45b = 20b + 20 \Rightarrow 25b = 20 \Rightarrow \underline{\underline{b = 0{,}8}}$

in (2)': $a = 45 \cdot 0{,}8 \Rightarrow \underline{\underline{a = 36}}$

