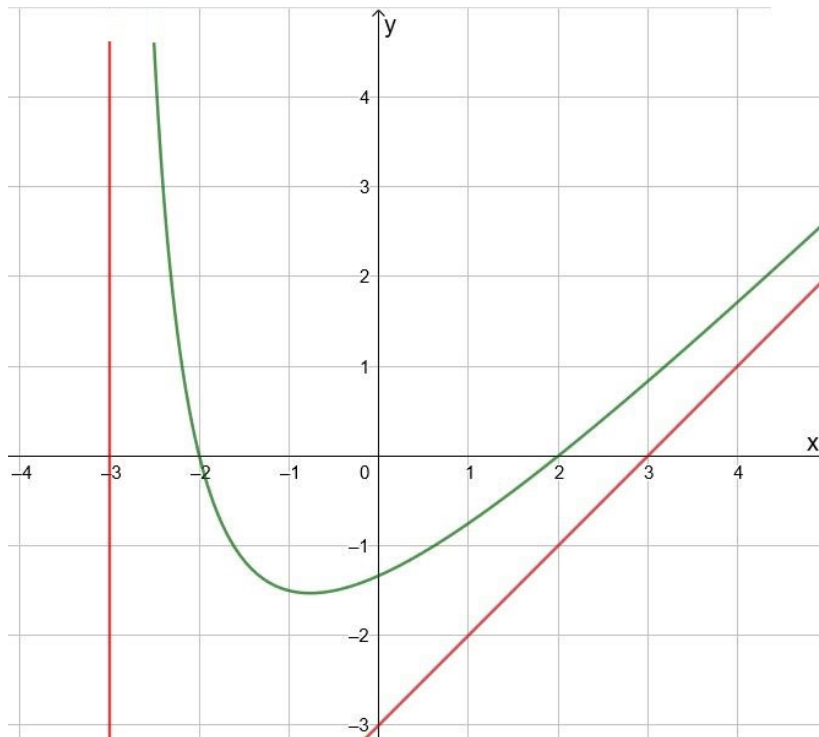


## Analysis Aufgabengruppe 1

1  $f(x) = x - 3 + \frac{5}{x+3}$ ;  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

- a)  $x = -3$ : senkrechte Asymptote bei der Definitionslücke  
 $y = x - 3$ : schräge Asymptote für  $x \rightarrow \pm\infty$



### Schnittpunkt der Asymptoten

Gleichsetzen funktioniert hier nicht, da die senkrechte Asymptote keine Funktion ist. Für den Schnittpunkt gilt aber:  $x = -3$

Einsetzen in die schräge Asymptote ergibt:  $y = -3 - 3 = -6 \Rightarrow \underline{\underline{S(-3 / -6)}}$

### b) Schnittpunkt mit der y-Achse

$$f(0) = 0 - 3 + \frac{5}{0+3} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \underline{\underline{T\left(0 / -\frac{4}{3}\right)}}$$

Der Graph von  $f$  verläuft oberhalb der schrägen Asymptote, wenn  $\frac{5}{x+3} > 0$ .

Da für  $x > -3$  der Nenner immer positiv ist, ist der ganze Bruch stets positiv. Daher verläuft der Graph von  $f$  in diesem Bereich oberhalb der schrägen Asymptote.

$$c) f(x) = x - 3 + \frac{5}{x+3} = \frac{(x-3)(x+3)+5}{x+3} = \frac{x^2-9+5}{x+3} = \frac{x^2-4}{x+3}$$

Nullstellen

$$f(x) = 0: x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \underline{x_{1/2} = \pm 2}$$

d) x-Koordinate des TIP

$$f'(x) = \frac{(x+3) \cdot 2x - (x^2-4) \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+6x-x^2+4}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+4}{(x+3)^2}$$

Hinweis: Es kann genauso gut der ursprüngliche Term abgeleitet werden.

$$f'(x) = 0: x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -3 \pm \sqrt{5}$$

Aus dem gegebenen Graphen ergibt sich, dass zum TIP der größere Wert gehört.  $\Rightarrow \underline{x_{TIP} = -3 + \sqrt{5}}$

e) Der Betrag des Integrals ist die Fläche, die der Graph von f und die x-Achse im Bereich  $-2 \leq x \leq 2$  einschließen. Da die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, ist der Wert negativ. Da nur ein Näherungswert gesucht ist, sind die Kästchen zu zählen.

$$\text{Es ergibt sich: } \int_{-2}^2 f(x) dx \approx \underline{\underline{-4}}$$

$$f) I(x) = \int_{-2}^x f(t) dt; x > -3; F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5\ln(x+3)$$

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x - 3 + \frac{5}{x+3} = x - 3 + \frac{5}{x+3} = f(x)$$

$\Rightarrow F$  ist Stammfunktion von  $f$  für  $x > -3$ .

$$\lim_{x \rightarrow -3} I(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \int_{-2}^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow -3} (F(x) - F(-2))$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \left( \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5\ln(x+3) - \left[ \frac{1}{2} \cdot 4 - 3(-2) + 5\ln 1 \right] \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \left( \underbrace{\frac{1}{2}x^2 - 3x}_{\rightarrow 13,5} + \underbrace{5\ln(x+3)}_{\substack{\rightarrow 0+ \\ \rightarrow -\infty}} - 8 \right) = \underline{\underline{-\infty}}$$

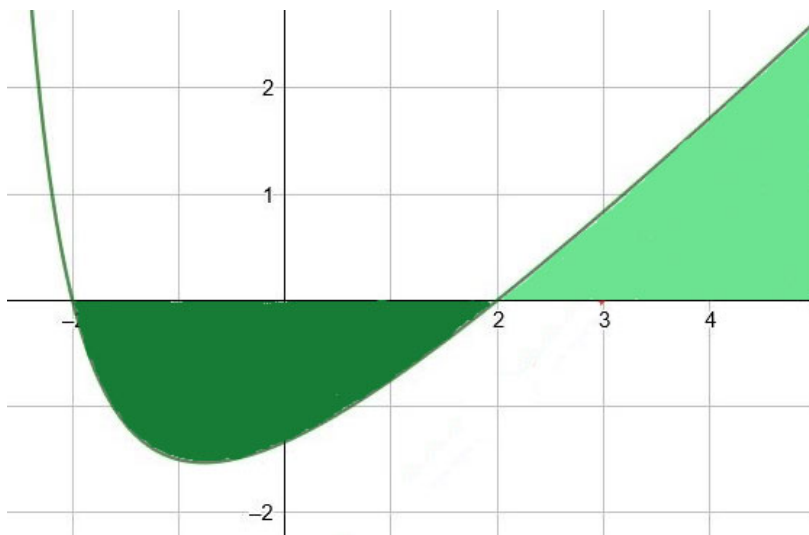
Die Fläche, die von dem Graphen von  $f$ , der x-Achse und der Gerade  $x = -3$  im II. Quadranten eingeschlossen wird, ist daher nicht endlich.

g) Nullstellen von I

Eine Nullstelle ergibt sich, wenn man die Untergrenze in I einsetzt, also für  $x = -2$ , da es dann keine Fläche gibt.

Eine weitere Nullstelle gibt es, wenn sich im Integrationsintervall Flächenstücke unter- und oberhalb der  $x$ -Achse gegenseitig aufheben. Da die Fläche unterhalb der  $x$ -Achse für  $-2 \leq x \leq 2$  etwa 4 beträgt (vgl. e) und die Fläche oberhalb der  $x$ -Achse für  $x > 2$  gegen unendlich geht, gibt es eine Stelle für  $x > 2$ , an der  $I(x) \approx 4$  gilt. Somit gibt es insgesamt mindestens zwei Nullstellen von I.

*Hinweis: Auch für  $-3 < x < -2$  gibt es ein Flächenstück, das der Fläche unterhalb der  $x$ -Achse entspricht (vgl. f). Da in diesem Fall in die „falsche“ Richtung integriert wird, ist das Integral jedoch negativ, so dass sich die einzelnen Integrale nicht aufheben. Hier also keine weitere Nullstelle von I.*



2  $f_k(x) = \frac{x^2 - k}{x + 3}$ ;  $x \neq -3$ ;  $k \neq 9$ ; es gilt:  $f(x) = f_4(x)$

a) Nullstellen ergeben sich nur, wenn der Zähler null ist:

$$x^2 - k = 0 \Rightarrow x^2 = k \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{k}$$

Für  $k > 0$  gibt es genau zwei (einfache) Nullstellen, für  $k = 0$  eine doppelte (also ohne Vorzeichenwechsel) und für  $k < 0$  keine Nullstelle.

b)  $f_k'(x) = \frac{x^2 + 6x + k}{(x + 3)^2}$

$G_k$  hat keinen Extrempunkt, wenn die Ableitung und somit deren Zähler nicht null werden kann. Wir setzen den Zähler gleich null:

$$x^2 + 6x + k = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot k}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4k}}{2}$$

Für  $36 - 4k < 0$  bzw.  $k > 9$  hat die Gleichung keine Lösung und  $G_k$  somit keinen Extrempunkt.

c) **Tangente  $t_k$  an  $G_k$  in  $(0 / f_k(0))$**

Die Steigung der Tangente ist die Ableitung von  $f_k$  an der Stelle  $x = 0$ :

$$f_k'(0) = \frac{0 + k}{(3)^2} = \frac{k}{9}$$

Wenn zwei Geraden aufeinander senkrecht stehen, ergibt das Produkt ihrer Steigungen  $-1$ . Die schräge Asymptote hat die Steigung 1:

$$\frac{k}{9} \cdot 1 = -1 \Rightarrow \underline{\underline{k = -9}}$$

d) **Tangentengleichung**

Es fehlt noch der y-Wert des Punktes:  $f_k(0) = \frac{-k}{3}$

Der Punkt und die Steigung in die allg. Geradengleichung eingesetzt:

$$\frac{-k}{3} = \frac{k}{9} \cdot 0 + t \Rightarrow t = -\frac{k}{3} \Rightarrow \underline{\underline{t_k(x) = \frac{k}{9}x - \frac{k}{3}}}$$

**Gemeinsamer Punkt**

$$\underline{\underline{t_{k_1}(x) = t_{k_2}(x)}}: \frac{k_1}{9}x - \frac{k_1}{3} = \frac{k_2}{9}x - \frac{k_2}{3} \Rightarrow k_1 \left( \frac{1}{9}x - \frac{1}{3} \right) = k_2 \left( \frac{1}{9}x - \frac{1}{3} \right)$$

Da  $k_1 \neq k_2$ , ist die Gleichung nur erfüllt, wenn  $\frac{1}{9}x - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{9}x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 3$ .

Der Punkt  $(3 / 0)$  liegt also auf allen Tangenten  $t_k$ .