Stochastik Aufgabengruppe 2

1 Es gibt insgesamt 5 ungerade Zahlen.

X: Anzahl der ungeraden Zahlen

$$P(A) = P(X = 7) = \binom{20}{7} \cdot 0{,}5^7 \cdot 0{,}5^{13} = \underline{\underline{0{,}07393 \approx 7{,}4\,\%}}$$

$$P(B) = P(7 < X \le 12) = P(8 \le X \le 12) = P(X \le 12) - P(X \le 7)$$

$$= \sum_{i=0}^{12} B(20;0{,}5;i) - \sum_{i=0}^{7} B(20;0{,}5;i) \overset{TW}{=} 0{,}86841 - 0{,}13159 = \underline{\underline{0{,}73682 \approx 73{,}7\,\%}}$$

2 C: Die Summe der beiden Zahlen soll kleiner als 4, also höchstens 3 sein. Das gilt für die Kombinationen (0;0), (0;1), (0;2), (0;3), (1;0), (1;1), (1;2), (2;0), (2;1) und (3;0), also insgesamt 10 Kombinationen. Jede Kombination hat die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0{,}01$.

$$P(C) = 10 \cdot 0{,}01 = 0{,}1$$

D: Ein Produkt von 2 oder 3 ergibt sich für die Kombinationen (1;2), (2;1), (3;1) und (1;3), also insgesamt 4 Kombinationen.

$$P(D) = 4 \cdot 0{,}01 = 0{,}04$$

$C \cap D$: (1;2) und (2;1), also insgesamt 2 Kombinationen.

$$P(C \cap D) = 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}02$$

$$P(C) \cdot P(D) = 0{,}1 \cdot 0{,}04 = 0{,}004 \neq P(C \cap D)$$

C und D sind daher stochastisch **abhängig**.

3

a) Eine Auszahlung erhält Spieler 1, wenn bei allen 4 Versuchen keine 0 kommt.

$$P(A) = 0{,}9^4 = \underline{\underline{0{,}6561 \approx 65{,}6\,\%}}$$

b) x: Auszahlung in €

x	0	61	62	63	64	65	66	67	68	69
$P(X = x)$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

$$E(X) = (0 + 61 + 62 + 63 + 64 + 65 + 66 + 67 + 68 + 69) \cdot 0{,}1 = 585 \cdot 0{,}1 = 58{,}5$$

Der Erwartungswert ist kleiner als die aktuelle Auszahlung i.H.v. 60 €. Daher ist Spieler 2 zu raten, das Spiel sofort zu beenden.

c) Es soll gelten: $5n \cdot 0{,}9^n = 5(n+1) \cdot 0{,}9^{n+1} \Rightarrow 5n \cdot \frac{0{,}9^n}{0{,}9^{n+1}} = 5(n+1)$

$\Rightarrow n \cdot 0{,}9^{n-(n+1)} = n+1 \Rightarrow n \cdot 0{,}9^{-1} = n+1 \Rightarrow \frac{10}{9}n = n+1 \Rightarrow \frac{1}{9}n = 1$

$\Rightarrow n = 9$

Für $n = 9$ und $n = 10$ ergibt sich derselbe Erwartungswert, nämlich $E(X) = 45 \cdot 0{,}9^9 = 17{,}43$.

Für $n = 11$ ergibt sich der Erwartungswert $E(X) = 55 \cdot 0{,}9^{11} = 17{,}26$.
Dieser stimmt nicht mit den beiden anderen Erwartungswerten überein.

Daher gibt es zwei, aber nicht drei aufeinanderfolgende Werte von n mit übereinstimmenden Erwartungswerten.

4

a) Für $n = 5$ beträgt die Wahrscheinlichkeit für jede Zahl $p = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

Es gibt 5 Möglichkeiten für zwei gleiche Zahlen: 2-mal 0, 2-mal 1,… 2-mal 5.

Die zwei gleichen Zahlen können auf $\binom{3}{2}$ verschiedene Arten auf die 3 Plätze verteilt werden. Für die verbleibende Zahl gibt es noch 4 Möglichkeiten.

$$P(\text{"genau zwei gleiche Zahlen"}) = 5 \cdot \binom{3}{2} \cdot 4 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}2 = \underline{\underline{0{,}48 = 48\,\%}}$$

b) Für $n = 5$ gilt (5-mal drehen und 5 Sektoren):

$$P(\text{"alle Zahlen sind verschieden"}) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5^5} = \frac{5!}{5^5} = 0{,}0384 > 0{,}01$$

Allgemein: $P(\text{"alle Zahlen sind verschieden"}) = \frac{n!}{n^n}$

Da eine Ungleichung der Form $\frac{n!}{n^n} < 0{,}01$ nicht elementar lösbar ist, hilft hier nur „Probieren“ durch Einsetzen. Bei $n = 5$ sind wir jedoch nicht weit entfernt.

Für $n = 6$ gilt: $P(\text{"alle Zahlen sind verschieden"}) = \frac{6!}{6^6} \approx 0{,}01543 > 0{,}01$

Für $n = 7$ gilt: $P(\text{"alle Zahlen sind verschieden"}) = \frac{7!}{7^7} \approx 0{,}00612 < 0{,}01$

Der kleinste Wert ist also $n = 7$, so dass die Wahrscheinlichkeit für lauter verschiedene Zahlen kleiner als 1 % ist.

