Geometrie Aufgabengruppe 2

A(6 / 3 / 0); B(0 / 6 / 0); C(3 / 0 / 0); D(6 / 3 / 6); E(0 / 6 / 6); F(3 / 0 / 12)

a) $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 0-6 \\ 6-3 \\ 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ 0-3 \\ 12-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_L} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow L: 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + c = 0$

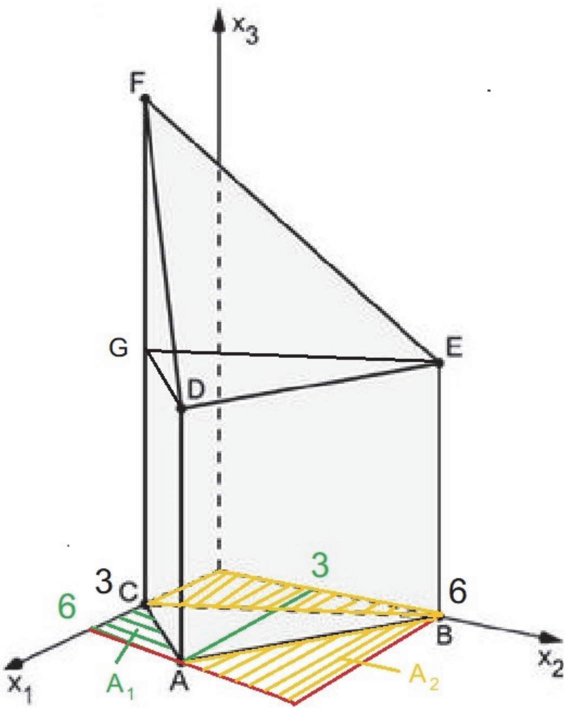
D eingesetzt: $2 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + c = 0 \Rightarrow c = -42$

$\Rightarrow \underline{\underline{L: 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 42 = 0}}$

b) Der gesuchte Winkel ist der zwischen den Normalenvektoren der beiden Ebenen:

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{3}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{29}} \Rightarrow \underline{\underline{\varphi \approx 56{,}15^\circ}}$$

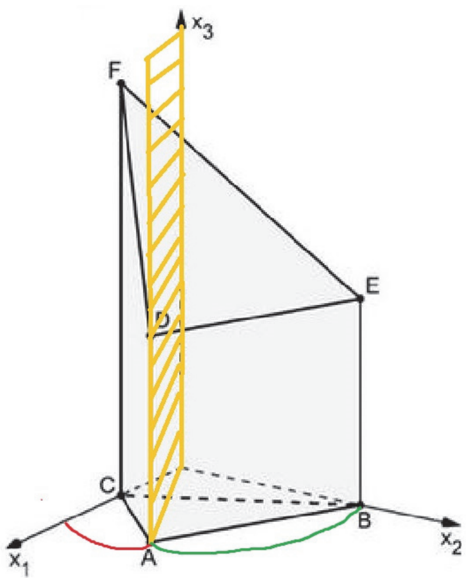
c) $A_{\Delta ABC} = \underbrace{6 \cdot 6}_{\text{Quadrat}} - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3}_{A_1} - 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6}_{A_2} = 13{,}5$



d) Der Körper setzt sich zusammen aus einem Prisma mit Grundfläche ABC und Höhe $\overline{BE} = 6$ sowie einer Pyramide mit Grundfläche DEG bzw. ABC und der Höhe $\overline{CF} - \overline{BE} = 12 - 6 = 6$.

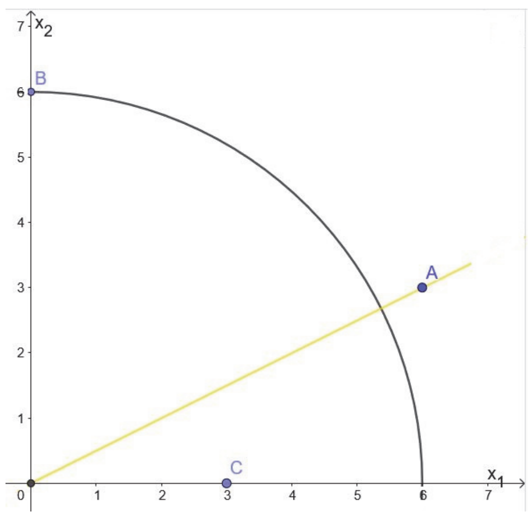
$$\Rightarrow V = 13{,}5 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 13{,}5 \cdot 6 = \underline{\underline{108}}$$

e) Die Ebene N_k verläuft senkrecht. Der Punkt $P_k(1-k\,/\,k\,/\,0)$ liegt in den nicht definierten Extremfällen für $k = 0$ auf der x_1-Achse und für $k = 1$ auf der x_2-Achse. Für $k = 0$ ist N_k daher die x_1x_3-Ebene, für $k = 1$ die x_2x_3-Ebene.



Beginnt man nun die Ebene ausgehend von der x_1x_3-Ebene gegen den Uhrzeigersinn zu drehen, so werden zunächst die Kanten [AC], [BC], [DF] und [EF] geschnitten und zwar so lange, bis der Punkt A in der Ebene liegt. Dreht man dann weiter, so werden ab dann die Kanten [AB], [BC], [DE] und [EF] geschnitten, bis die x_2x_3-Ebene erreicht ist.

Von oben betrachtet ergibt sich folgendes Bild:



Dabei ergibt sich der größere Bereich, wenn man bei A weiterdreht.
Fraglich ist nun noch, für welches k der Punkt A in der Ebene N_k liegt.

Dazu stellen wir eine Ebene N_{k_A} mit den Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix}$ sowie Aufpunkt A auf:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\\0\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\overrightarrow{n_{N_{k_A}}}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N_{k_A}: -x_1+2x_2+c=0$$

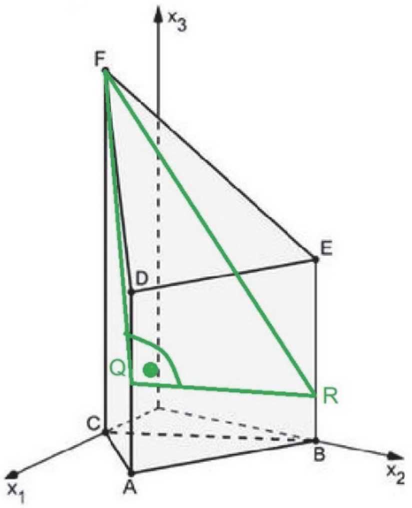
Da die Ebene durch den Ursprung geht, gilt: $c=0$.

Eingesetzt: $N_{k_A}: -x_1+2x_2=0$

$\underline{P_k(1-k/k/0)\in N_{k_A}}$: $\quad -(1-k)+2k=0 \quad\Rightarrow -1+k+2k=0 \quad\Rightarrow 3k=1 \quad\Rightarrow k=\frac{1}{3}$

$\left]\frac{1}{3};1\right[$ ist der größte Bereich, in dem N_k für alle Werte von k die gleichen Kanten des Körpers schneidet. Das sind die Kanten [AB], [BC], [DE] und [EF] (s.o.).

f)



Q liegt auf der Geraden g durch A und D mit $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wegen dem rechten Winkel muss außerdem gelten: $\overrightarrow{QF} \circ \overrightarrow{QR} = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3-q_1 \\ 0-q_2 \\ 12-q_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0-q_1 \\ 6-q_2 \\ 2-q_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (3-q_1)\cdot(-q_1) + (-q_2)\cdot(6-q_2) + (12-q_3)\cdot(2-q_3) = 0$$

Jetzt setzen wir die Gerade ein:

$$(3-6)\cdot(-6) + (-3)\cdot(6-3) + (12-\lambda)\cdot(2-\lambda) = 0 \Rightarrow 18 - 9 + 24 - 12\lambda - 2\lambda + \lambda^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 14\lambda + 33 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4\cdot 1\cdot 33}}{2} \Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{14 \pm 8}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 11;\ \lambda_2 = 3$$

Einsetzen in g:

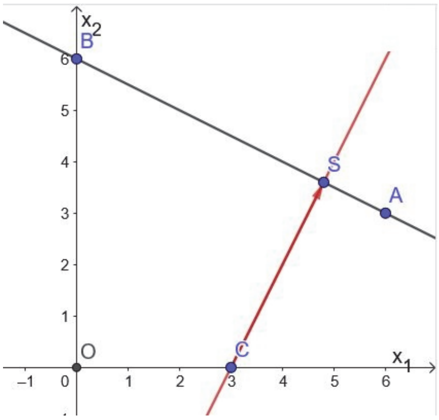
$$\overrightarrow{Q_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 11\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{Q_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die x_3-Koordinate von Q_1 ($x_3 = 11$) ist größer als die von D ($x_3 = 6$). Daher liegt Q_1 oberhalb von D und somit nicht auf der Strecke [AD].
Der gesuchte Punkt ist also $Q(6/3/3)$ mit der x_3-Koordinate $x_3 = 3$.

g) $$\underbrace{\begin{pmatrix}6\\-3\\0\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{BA}} \circ \left[\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}}_{\vec{B}} + \lambda\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}6\\-3\\0\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{BA}}}_{\text{Gerade BA}} - \underbrace{\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}}_{\vec{C}}\right] = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0{,}8,\ \text{d.h. } S(4{,}8\,/\,3{,}6\,/\,0)$$

Setzt man λ in die Gerade BA ein, so ergibt sich S.

$$\left[\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} + 0{,}8\cdot\begin{pmatrix}6\\-3\\0\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{OS}} - \underbrace{\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{OC}}}_{\overrightarrow{CS}}\right]$$



Außerdem soll gelten: $\vec{T} = \vec{S} + \left|\overrightarrow{CS}\right| \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$ T liegt senkrecht über S.

Aufgabenstellung: Der Punkt C liegt nach der in der Angabe beschriebenen Drehung im Punkt T. Geben Sie die Koordinaten von T an.

Lösung (nicht verlangt): Wegen der 90^0-Drehung liegt T senkrecht über S, dem Fußpunkt des Lots von C auf die Gerade AB bei gleicher Entfernung.

S bekommen wir wie folgt: es muss gelten: $\overrightarrow{CS} \circ \overrightarrow{BA} = 0$
Dabei setzen wir für S die Geradengleichung von BA ein. Einsetzen des sich ergebenden λ in die Gerade ergibt S…

Hinweis 1: Eine Skizze ist hier sehr hilfreich. Diese lässt sich leicht 2-dimensional und somit genau anfertigen, da alle Punkte außer T in der x_1x_2-Ebene liegen.
Hinweis 2: Standardmäßig ließe sich das Problem (Abstand Punkt-Gerade) natürlich mit einer Hilfsebene durch C lösen. Hilft hier aber nicht weiter.

