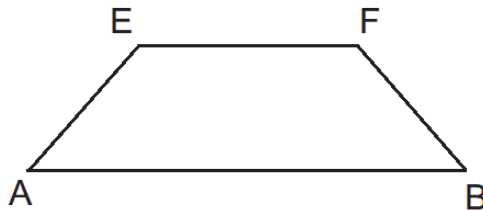


Geometrie Aufgabengruppe 1

A(19/0/0); B(0/19/0); E(12/0/7); F(0/12/7)

a)



Das Viereck ist ein Trapez, wenn zwei Vektoren Vielfache voneinander sind:

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 0-19 \\ 19-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} = 19 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overline{EF} = \begin{pmatrix} 0-12 \\ 12-0 \\ 7-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = 12 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{EF} = \frac{12}{19} \cdot \overline{AB} \Rightarrow \text{ABFE ist ein Trapez.}$$

$$|\overline{AE}| = \left| \begin{pmatrix} 12-19 \\ 0-0 \\ 7-0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-7)^2 + 0^2 + 7^2} = \sqrt{98}$$

$$|\overline{BF}| = \left| \begin{pmatrix} 0-0 \\ 12-19 \\ 7-0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + (-7)^2 + 7^2} = \sqrt{98} = |\overline{AE}|$$

Das Trapez hat zwei gleich lange Seiten.

$$\text{b) } \overline{AB}_{\text{gekürzt}} \times \overline{AE}_{\text{gekürzt}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}_L$$

$$\Rightarrow L: x_1 + x_2 + x_3 + c = 0$$

$$\text{A eingesetzt: } 19 + 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = -19$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L: x_1 + x_2 + x_3 - 19 = 0}}$$

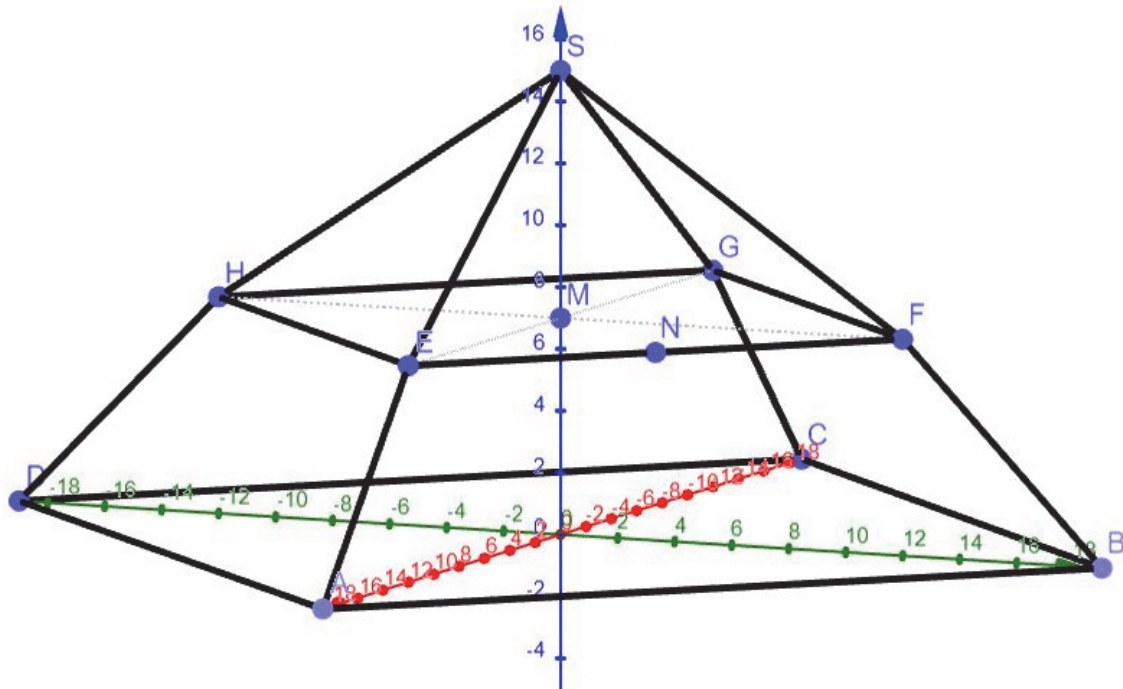
Der Winkel mit der x_1x_2 -Ebene ist der Winkel zwischen den Normalenvektoren:

$$\cos \varphi = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \underline{\underline{\varphi \approx 54,7^\circ}}$$

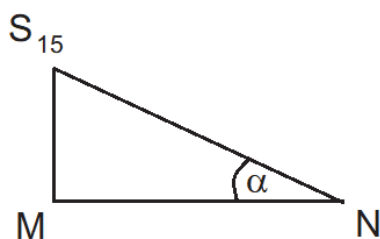
- c) Damit sich eine Pyramide mit Seitenfläche ABFE ergibt, muss die Spitze $S_k(0/0/k)$ in der Ebene L liegen.

Einsetzen ergibt: $0 + 0 + k - 19 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{k = 19}}$

- d) M ist der Mittelpunkt des Quadrats EFGH, N ist der Mittelpunkt der Strecke [EF] wegen $\vec{N} = \frac{1}{2}(\vec{E} + \vec{F})$.



Es soll gelten: $\overline{MS_{15}} < \overline{MN}$



Wäre $\overline{MS_{15}} = \overline{MN}$, dann wären die beiden Basiswinkel des dann gleichschenkligen Dreiecks genau 45° . Da in einem Dreieck der größeren Seite immer auch der größere Winkel gegenüberliegt, beträgt der Winkel zwischen den Seiten [NM] und [NS₁₅] und somit der Winkel zwischen der Seiten- und der Grundfläche der Pyramide weniger als 45° .

- e) Die Höhenveränderung ergibt sich aus den Spitzen der ursprünglichen (vgl. c) und der Knickpyramide. Der Höhenverlust beträgt $(19 - 15) \cdot 7 \text{ m} = 28 \text{ m}$.

Der Neigungswinkel des unteren Teils beträgt $54,7^\circ$ (vgl. b). Im oberen Teil beträgt dieser weniger als 45° . Der Unterschied beträgt $54,7^\circ - 45^\circ = 9,7^\circ$ und somit mehr als 9° .

- f) Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden $S_{15}E$ mit der x_1x_2 -Ebene ($x_3 = 0$):

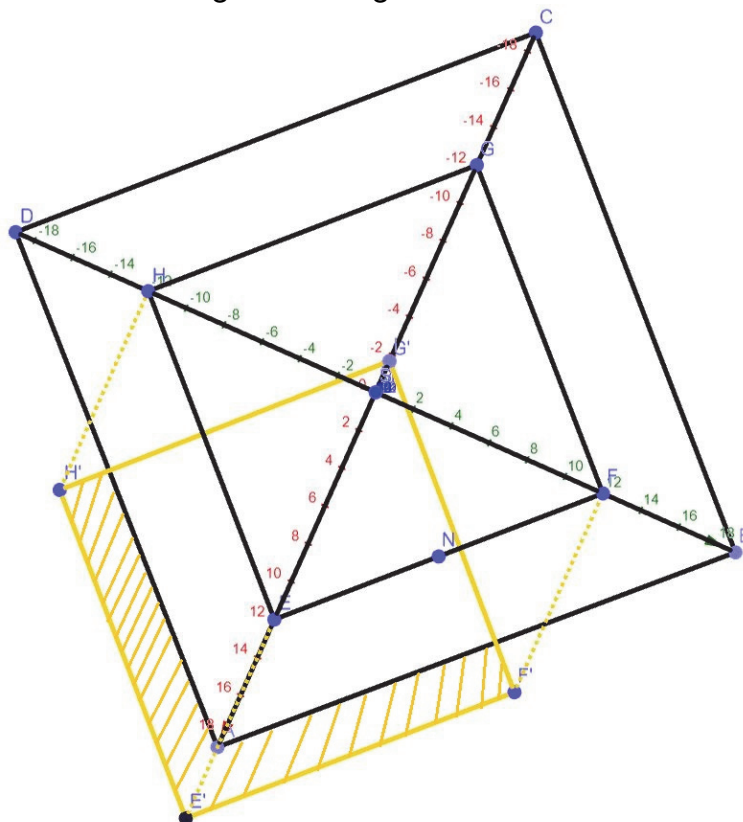
$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 12-0 \\ 0-0 \\ 7-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Gerade in die x_1x_2 -Ebene ergibt:

$$15 - 8\lambda = 0 \Rightarrow 8\lambda = 15 \Rightarrow \lambda = 1,875$$

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + 1,875 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{T(22,5 / 0 / 0)}}$$

- g) Der Schattenpunkt von G liegt innerhalb der Grundfläche, die anderen außerhalb. Bei Ansicht von oben ergibt sich folgendes Bild:



Die Schattenfläche ist also ein Quadrat, bei dem ein kleineres Quadrat ausgeschnitten ist (also um den Rand) bzw. zwei rechtwinklige Trapeze mit der gemeinsamen Seite $[E'A]$.