Analysis Aufgabengruppe 2

1 $f(x) = x \cdot (8-5x) \cdot \left(1-\frac{x}{4}\right)^2 = -\frac{5}{16}x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 8x$

$f'(x) = (5x^2 - 16x + 8) \cdot \left(1-\frac{x}{4}\right)$

a) **Nullstellen**

$\underline{f(x)=0:}\ x \cdot (8-5x) \cdot \left(1-\frac{x}{4}\right)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ (einfach)

$8 - 5x = 0 \Rightarrow x_2 = 1{,}6$ (einfach)

$\left(1-\frac{x}{4}\right)^2 = 0 \Rightarrow 1-\frac{x}{4} = 0 \Rightarrow x_3 = 4$ (doppelt)

Die Zeitpunkte sind um 06:00 Uhr, um 07:36 Uhr und um 10:00 Uhr.

f hat als ganzrationale Funktion 4. Grades maximal vier einfache Nullstellen. Hier gibt es zwei einfache und eine doppelte Nullstelle. Daher kann es keine weitere Nullstelle und somit keinen weiteren Zeitpunkt geben, an dem die momentane Änderungsrate der Staulänge den Wert null hat.

b) $f(2) < 0:$ Nach zwei Stunden, also um 08:00 Uhr nimmt die Staulänge ab.

c) Gesucht ist der HOP von f:

$\underline{f'(x)=0:}\ (5x^2 - 16x + 8) \cdot \left(1-\frac{x}{4}\right) = 0 \Rightarrow x_1' = 4$

$$5x^2 - 16x + 8 = 0 \Rightarrow x_{2'/3'} = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 5 \cdot 8}}{10} = \frac{16 \pm \sqrt{96}}{10}$$

$$x_{2'} = \frac{16+\sqrt{96}}{10} \approx 2{,}58;\ x_{3'} = \frac{16-\sqrt{96}}{10} \approx 0{,}62$$

Laut Graph liegt der gesuchte HOP an der kleinsten Stelle mit waagrechter Tangente, also bei $x_{3'} = 0{,}62$. Um 06 Uhr 37 nimmt die Staulänge daher am stärksten zu.

d) Der Stau ist am längsten, wenn die momentane Änderungsrate, also f, vom Positiven ins Negative wechselt. Das ist bei $x_2 = 1{,}6$ der Fall (vgl. a), also um 07:36 Uhr.

e) Die Staulänge wird für jeden Zeitpunkt durch s wiedergegeben, wenn s die passende Stammfunktion von f ist.

$$s(x)=\left(\frac{x}{4}\right)^2\cdot(4-x)^3=-\frac{1}{16}x^5+\frac{3}{4}x^4-3x^3+4x^2$$

$$s'(x)=-\frac{5}{16}x^4+3x^3-9x^2+8x=f(x)$$

s ist daher **eine** Stammfunktion von f. Da $s(0)=0$ (der Stau beginnt um 06:00 Uhr), ist es auch die passende.

$s(4)=\left(\frac{4}{4}\right)^2\cdot(4-4)^3=0 \Rightarrow$ Der Stau hat sich um 10:00 Uhr komplett aufgelöst.

f) **Mittlere Änderungsrate**

$$s(0{,}5)=\left(\frac{0{,}5}{4}\right)^2\cdot(4-0{,}5)^3=\left(\frac{1}{8}\right)^2\cdot(3{,}5)^3=0{,}66992$$

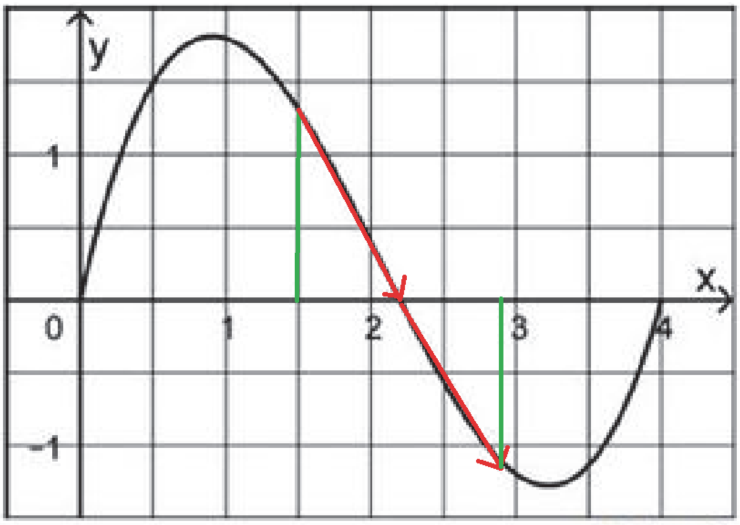
$$s(2)=\left(\frac{2}{4}\right)^2\cdot(4-2)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2^3=2$$

Der Stau nimmt von 06:30 Uhr bis 08:00 Uhr um $2-0{,}66992\approx 1{,}33\text{ km}$ zu.

Für die mittlere Änderungsrate in diesem Zeitraum ergibt sich:

$$m_s=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2-0{,}66992}{2-0{,}5}=\underline{\underline{0{,}88672}}$$

g) Ab 07:30 Uhr ($x=1{,}5$) nimmt der Stau zunächst weiter zu bis etwa 08:10 Uhr, da die momentane Änderungsrate hier positiv ist. Ab dann nimmt der Stau wieder ab. Die gleiche Länge wie um 07:30 Uhr wird erreicht, wenn er genau um diese Zunahme wieder abgenommen hat. Ablesen des x-Wertes ergibt etwa $x=2{,}9$ und somit einen Zeitpunkt von 08:54 Uhr.



2 $h_k(x) = (x-3)^k + 1$

a) **Ungerades k**

Für $k = 1$ ist der Graph eine steigende Gerade. Für $k \geq 3$ ist der Graph eine Parabel 3., 5., 7., … Ordnung mit positivem Leitkoeffizienten und einem Terrassenpunkt bei (3/1).

In beiden Fällen gilt: $\lim\limits_{x \to -\infty} h_k(x) = -\infty$

Gerades k

Für $k \geq 2$ ist der Graph eine nach oben geöffnete Parabel 2., 4., 6., … Ordnung mit positivem Leitkoeffizienten und Scheitel bei (3/1).

Hier gilt: $\lim\limits_{x \to -\infty} h_k(x) = \infty$

b) **Gemeinsame Punkte**

$\underline{h_{k_1}(x) = h_{k_2}(x):}$ $(x-3)^{k_1} + 1 = (x-3)^{k_2} + 1 \quad \Rightarrow (x-3)^{k_1} = (x-3)^{k_2} \quad \Rightarrow x_1 = 3$

$$\underline{x \neq 3:} \ \frac{(x-3)^{k_1}}{(x-3)^{k_2}} = 1 \quad \Rightarrow (x-3)^{k_1-k_2} = 1$$

Da $k_1 \neq k_2$, kann der Exponent nicht null werden. Eine weitere Lösung ergibt sich nur, wenn die Klammer „1“ ergibt, also für $x_2 = 4$.

$h_k(3) = 1$ (vgl. a)

$h_k(4) = (4-3)^k + 1 = 1^k + 1 = 2 \quad \Rightarrow \underline{\underline{S_1(3/1);\ S_2(4/2)}}$

c) $h_k'(x) = k \cdot (x-3)^{k-1}$

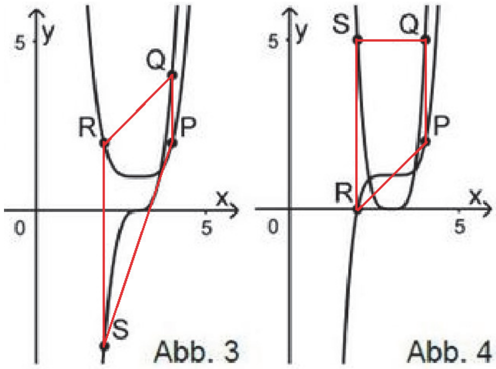
Damit h_k' eine Tangente sein kann, muss der Graph von h_k' eine Gerade sein, also muss die Ableitungsfunktion Grad 1 haben.
Es muss also gelten: $k - 1 = 1 \Rightarrow k = 2 \quad \Rightarrow h_2(x) = (x-3)^2 + 1;\ \ h_2'(x) = 2 \cdot (x-3)$

Gemeinsamer Punkt: $(x-3)^2 + 1 = 2(x-3) \quad \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + 1 = 2x - 6$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \quad \Rightarrow (x-4)^2 = 0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{x_{1/2} = 4}}$$

Wegen der doppelten Lösung handelt es sich um eine Berührstelle. Die Graphen haben dort also die gleiche Steigung. Daher ist h_2' dort Tangente an den Graphen von h_2. Da $k = 2$ oben die einzige Lösung ist, gibt es genau ein k für diesen Fall. Die Aussage ist also **wahr**.

d)



Bei Abb. 3 gehört der Terrassenpunkt zur Ableitung, bei Abb. 4 zur Funktion.

Da in beiden Fällen die x-Koordinaten von S und R bzw. von P und Q übereinstimmen, sind die Seiten [RS] und [PQ] parallel. Die Vierecke RSPQ bzw. SRPQ sind daher immer Trapeze.

Flächeninhalt des Trapezes RSPQ für k

$$A=\frac{1}{2}\cdot(\overline{RS}+\overline{QP})\cdot h \;=\frac{1}{2}\cdot((h_k(2)-h_k'(2))+(h_k(4)-h_k'(4)))\cdot 2$$
$$=(2-3)^k+1-k\cdot(2-3)^{k-1}+(4-3)^k+1-k\cdot(4-3)^{k-1}$$
$$=\underbrace{(-1)^{\overset{\text{gerade}}{\overbrace{k}}}}_{=1}+1-k\cdot\underbrace{(-1)^{\overset{\text{ungerade}}{\overbrace{k-1}}}}_{=-1}+\underbrace{1^k}_{=1}+1-k\cdot\underbrace{1^{k-1}}_{=1}=1+1-k\cdot(-1)+1+1-k=4$$

Flächeninhalt des Trapezes RSPQ für k + 1

$$A=\frac{1}{2}\cdot\left(\underbrace{(h_{k+1}'(2)-h_{k+1}(2))}_{\text{jetzt liegt } h_{k+1}' \text{ oben!}}+(h_{k+1}(4)-h_{k+1}'(4))\right)\cdot 2$$
$$=(k+1)\cdot(2-3)^k-(2-3)^{k+1}+1+(4-3)^{k+1}+1-(k+1)\cdot(4-3)^k$$
$$=(k+1)\cdot\underbrace{(-1)^{\overset{\text{gerade}}{\overbrace{k}}}}_{=1}-\underbrace{(-1)^{\overset{\text{ungerade}}{\overbrace{k+1}}}}_{=-1}+1+\underbrace{1^{k+1}}_{=1}+1-(k+1)\cdot\underbrace{1^k}_{=1}=k+1+1+1+1+1-k-1$$
$$=4$$

Die Flächeninhalte der Trapeze stimmen also für k und für $k+1$ überein.