Analysis Aufgabengruppe 1

1 $f(x)=2\cdot e^{-\frac{1}{8}x^2}$

a) **Schnittpunkt mit der y-Achse**

$f(0)=2\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot 0^2}=2\cdot e^0=2\cdot 1=2 \Rightarrow \underline{\underline{T(0/2)}}$

Achsensymmetrie

$f(-x)=2\cdot e^{-\frac{1}{8}(-x)^2}=2\cdot e^{-\frac{1}{8}x^2}=f(x) \Rightarrow$ Der Graph von f ist symmetrisch zur y-Achse.

b) **Wendetangente in $W\left(-2/2e^{-\frac{1}{2}}\right)$**

Für die Wendetangente brauchen wir die Steigung in W und deren y-Achsenabschnitt t.

$f'(x)=2\cdot e^{-\frac{1}{8}x^2}\cdot\left(-\frac{1}{8}\cdot 2x\right)=-\frac{1}{2}x\cdot e^{-\frac{1}{8}x^2}$

$f'(-2)=-\frac{1}{2}\cdot(-2)\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot 4}=e^{-\frac{1}{2}}=m$

Allg. Geradengleichung: $y=mx+t$

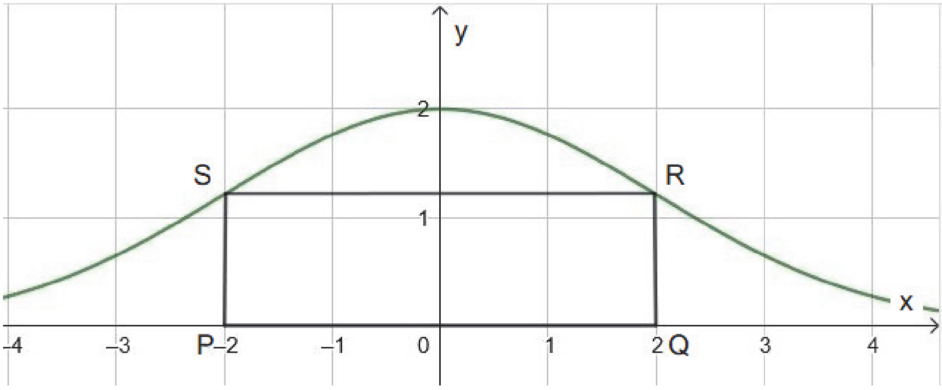
m und W eingesetzt: $2e^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2)+t \Rightarrow t=4e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \underline{\underline{t(x)=e^{-\frac{1}{2}}\cdot x+4e^{-\frac{1}{2}}}}$

Schnittpunkt mit der x-Achse

$\underline{t(x)=0:}\ e^{-\frac{1}{2}}\cdot x+4e^{-\frac{1}{2}}=0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}}\cdot x=-4e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x=\frac{-4e^{-\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}}=-4 \Rightarrow \underline{\underline{N(-4/0)}}$

c) Rechteck mit den Eckpunkten $P(-c/0),\ Q(c/0),\ R(c/f(c)),\ S$

Für $c=2$ ergibt sich: $P(-2/0),\ Q(2/0),\ \underbrace{R\left(2/2e^{-\frac{1}{2}}\right)}_{\text{Achsensymmetrie!}},\ \underbrace{S\left(-2/2e^{-\frac{1}{2}}\right)}_{\text{siehe 1b}}$



d) Es soll gelten: $\overline{QR} = 1$

$\underline{f(c) = 1}$: $2 \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2} = 1 \quad \Rightarrow e^{-\frac{1}{8}c^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow -\frac{1}{8}c^2 = \ln\frac{1}{2} \quad \Rightarrow -\frac{1}{8}c^2 = -\ln 2$

$$\Rightarrow c^2 = 8\ln 2 \;\Rightarrow \underline{\underline{c_1 = \sqrt{8\ln 2}}};\; (c_2 = -\sqrt{8\ln 2})$$

e) Länge des Rechtecks: $\overline{PQ} = 2c$

Breite des Rechtecks: $\overline{QR} = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2}$

Fläche des Rechtecks: $A(c) = 2c \cdot 2 \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2} = \underline{\underline{4c \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2}}}$

f) **Maximale Fläche**

$$A'(c) = 4 \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2} + 4c \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2} \cdot \left(-\frac{2}{8}c\right) = e^{-\frac{1}{8}c^2}\left(4 + 4c \cdot \left(-\frac{2}{8}c\right)\right) = e^{-\frac{1}{8}c^2}\left(-c^2 + 4\right)$$

$\underline{A'(c) = 0}$: $\underbrace{e^{-\frac{1}{8}c^2}}_{\neq 0}\left(-c^2 + 4\right) = 0 \quad \Rightarrow -c^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow c^2 = 4 \quad \Rightarrow c = 2 \;\; (c > 0)$

$A'(1) = e^{-\frac{1}{8}} \cdot 3 > 0$. Links von $c = 2$ nimmt A also zu. Somit handelt es sich bei $c = 2$ um ein Maximum. Für $c = 2$ ist die Fläche maximal.

g) $f_k(x) = f(x) + k;\;\; x \in \,]-\infty;0[$

f_k ist umkehrbar, wenn der Graph immer streng monoton steigend oder fallend ist, wenn also die Ableitung immer positiv oder immer negativ ist. Da k beim Ableiten rausfällt, gilt: $f_k'(x) = f'(x)$

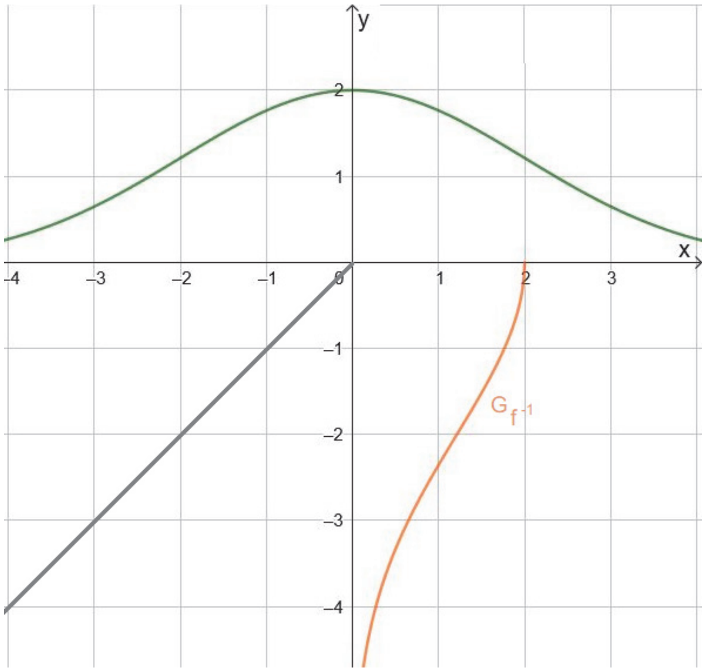
$$f_k'(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}x}_{>0} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{8}x^2}}_{>0} > 0 \quad \text{(x ist immer negativ!)}$$

f_k ist daher im Definitionsbereich streng monoton zunehmend und somit umkehrbar.

Graph

Für $k = 0$ gilt: $f_k(x) = f(x)$

Zum Zeichnen empfiehlt es sich bei mehreren Punkten des Graphen von f x und y zu vertauschen. Oder: Spiegeln an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.



h) Damit sich die Graphen von f und der Umkehrfunktion schneiden, muss sich der Graph von f mit der Winkelhalbierenden des III. Quadranten schneiden. Dies ist der Fall, wenn man dessen linke Hälfte um 2 nach unten verschiebt ($k = -2$). Dann liegt der rechte Rand im Ursprung und damit auf der Winkelhalbierenden. Allerdings gilt $x < 0$. Daher gibt es erst Schnittpunkte für $k < -2$.

Keinen Schnittpunkt gibt es entsprechend für $k \geq -2$.

2

a) Höhe und Breite lassen sich aus dem Graphen von f ablesen:

Höhe = 2 m

Breite = 8 m

b) Fenster: $g(x) = ax^4 + b$

Die Funktion g verhält sich ähnlich wie eine Parabel. Diese muss vorliegend nach unten geöffnet sein. Daher muss der Leitkoeffizient negativ sei, also $a < 0$. Damit das Fenster nicht vollständig unterhalb der x-Achse liegt, muss der Scheitel (0/b) oberhalb der x-Achse liegen, also $b > 0$.

c) f ist die Ableitung von F. Diese ist laut Graph immer positiv. In Abb. 3 sind Teile des Graphen fallend. Daher scheidet Abb. 3 aus.

Es gilt: $f(0) = F'(0) = 2$. Die Steigung des Graphen von F an der Stelle $x = 0$ muss also 2 betragen. Dies ist bei Abb. 2 offensichtlich nicht der Fall. Auch diese scheidet damit aus.

Daher stellt **Abb. 1** den Graphen von F dar.

d) Die Werte der Stammfunktion lassen sich näherungsweise der Abb. 1 entnehmen.

Fläche der gesamten Gaube

$$\int_{-4}^{4} f(x)dx = 2\cdot\int_{0}^{4} f(x)dx = 2\cdot[F(x)]_0^4 = 2\cdot[F(4)-F(0)] \approx 2[5-0] \approx 10$$

Die gesamte Gaube hat also eine Fläche von etwa 10 m^2.

Da der Graph von f rechtsgekrümmt ist, gilt: $f''(x) < 0$

Da bei beiden Termen der Zähler und die Wurzel im Nenner stets positiv sind, hängt das Vorzeichen der 2. Ableitung von der Klammer im Nenner ab.

Fläche ohne Fenster

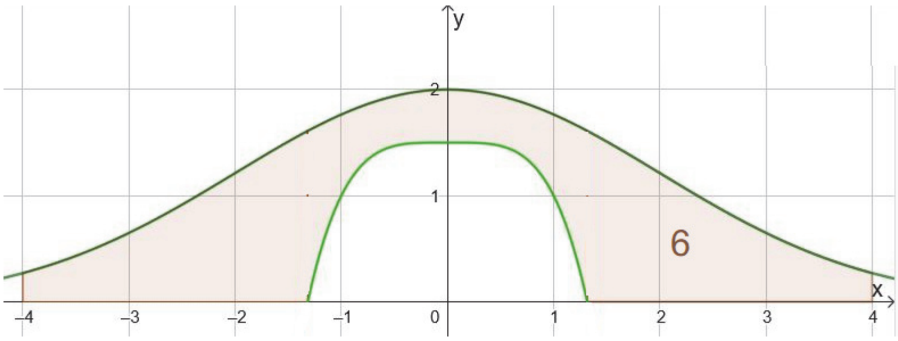
Die Fläche ohne Fenster soll 6 m^2 betragen. Also beträgt die Fläche des Fensters $10-6=4\ m^2$.

Es gilt: $g(x) = ax^4 + 1{,}5$

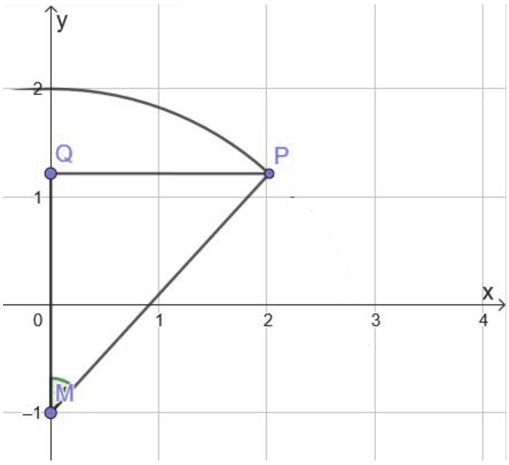
Von g benötigen wir zunächst die Nullstellen x_1 und x_2 ($x_1 < x_2$).

Die Fensterfläche beträgt dann $\int_{x_1}^{x_2} g(x)dx$.

Ansatz: $\int_{x_1}^{x_2} g(x)dx = 4$



e)



Für die Länge des Kreisbogens benötgen wir zunächst den Mittelpunktswinkel des Sektors. Diesen bekommen wir mit den trigonometrischen Sätzen im rechtwinkligen Dreieck MPQ. Dort gilt: $\overline{MP} = 3$ (Radius) und $\overline{QP} = 2$.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \alpha \approx 41{,}8^0$$

Somit ergibt sich für den Kreisbogen: $b = \frac{41{,}8}{360} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \pi$

Dieser wird viermal benötigt. Insgesamt beträgt die Länge des Bogens der Fenstergaube also näherungsweise $4 \cdot \frac{41{,}8}{360} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \pi \approx 8{,}76$ m.

