Stochastik Aufgabengruppe 2

1

a) B: Befragter kennt die Baumpatenschaft
U: Befragter kennt die Umweltwoche

Bekannte Größen sind grün gedruckt:

	B	$\overline{B}$	
U	0,14	0,56	0,7
$\overline{U}$	0,06	0,24	0,3
	0,2	0,8	1

$P(U)\cdot P(B)=0{,}7\cdot 0{,}2=0{,}14=P(U\cap B)$
U und B sind daher stochastisch **unabhängig**.

b) $P_B(\overline{U})=\frac{P(\overline{U}\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}06}{0{,}2}=\underline{\underline{0{,}3=30\,\%}}$

2

a)

k	0	1	2	3
$P(Z=k)$	$\frac{1}{3}$	p_1	p_2	$\frac{1}{12}$

Eine 2 ergibt sich für die Kombinationen (20;0) und (0;2):

$$p_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$p_2=1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)=\underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

b) X: Gewinn für SMV pro Spiel; n: Anzahl der Spiele

k	0	1	2	3
Einnahmen	3 €	3 €	3 €	3 €
Ausgaben	0 €	2 €	4 €	6 €
Gewinn	3 €	1 €	-1 €	-3 €
$P(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

$$E(X)=3\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}-1\cdot\frac{1}{4}-3\cdot\frac{1}{12}\;=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{5}{6}$$

Es soll gelten: $n\cdot\frac{5}{6}=300\quad\Rightarrow \underline{\underline{n=360}}$

Das Spiel muss **360 mal** durchgeführt werden.

c) X: Anzahl der Spieler, die mindestens 4 € ausgezahlt bekommen

Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette der Länge $n=8$. Mindestens 4 € bekommt ein Spieler ausgezahlt für $k=2$ und $k=3$. Die Trefferquote ist daher $p=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$.

$$P(X>2)=P(X\geq 3)=1-P(X\leq 2)\;=1-\sum_{i=0}^{2}B\left(8;\frac{1}{3};i\right)\overset{TW}{=}1-0{,}46822$$
$$=\underline{\underline{0{,}53178\approx 53{,}2\%}}$$

d) Die Summe der drei unterschiedlichen Auszahlungen soll 12 € betragen. Einzige Möglichkeit ist, dass einer 2 €, ein anderer 4 € und der dritte 6 € ausgezahlt bekommt. Die Auszahlungen können bei den 3 Personen auf $3!$ verschiedene Arten getauscht werden.

$$P(D)=3!\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}=\underline{\underline{\frac{1}{24}\approx 4{,}2\%}}$$

3

a) $n = 8$; $\sigma = \frac{4}{3}$

Es gilt bei einer Binomialverteilung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p_X \cdot (1 - p_X)}$

Eingesetzt: $\frac{4}{3} = \sqrt{8 \cdot p_X \cdot (1 - p_X)} \Rightarrow \frac{16}{9} = 8 \cdot p_X \cdot (1 - p_X) \Rightarrow \frac{16}{9} = 8p_X - 8p_X{}^2$

$\Rightarrow 16 = 72p_X - 72p_X{}^2 \Rightarrow 72p_X{}^2 - 72p_X + 16 = 0$

$\Rightarrow p_{X\,1/2} = \frac{72 \pm \sqrt{72^2 - 4 \cdot 72 \cdot 16}}{2 \cdot 72} = \frac{72 \pm 24}{144} \Rightarrow p_X = \frac{2}{3}$ oder $p_X = \frac{1}{3}$

Die Trefferquote muss auch zum Histogramm passen.

Für $p_X = \frac{2}{3}$ ergibt sich für den Erwartungswert: $E(X) = 8 \cdot \frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$

Für $p_X = \frac{1}{3}$ ergibt sich für den Erwartungswert: $E(X) = 8 \cdot \frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$

Die höchsten Säulen sind im Diagramm bei $X = 2$ und $X = 3$. Diese müssen aber in der Nähe des Erwartungswerts liegen. Daher ist $p_X = \frac{1}{3}$ die einzige Lösung.

b) Bei den Zufallsgrößen X und Y sind Treffer und Niete vertauscht.

Aus Sicht von X bedeutet $P(Y \geq 6)$ mindestens 6 Nieten, also höchstens 2 Treffer, also $P(Y \geq 6) = P(X \leq 2)$.