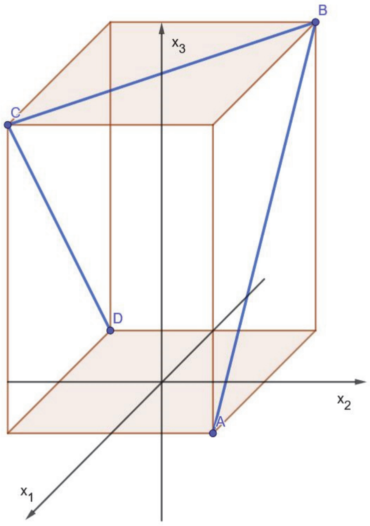
Geometrie Aufgabengruppe 2

$A(11/11/0)$; $B(-11/11/28)$; $C(11/-11/28)$; $D(-11/-11/0)$



a) B und C haben jeweils vom Betrag die gleiche und vom Vorzeichen entgegengesetzte x_1- und x_2-Koordinate sowie die gleiche x_3-Koordinate. Daher haben sie den gleichen Abstand zur x_3-Achse und sind zu dieser symmetrisch.

b) $$\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|+\left|\overrightarrow{CD}\right|=\left|\begin{pmatrix}-11-11\\11-11\\28-0\end{pmatrix}\right|+\left|\begin{pmatrix}11-(-11)\\-11-11\\28-28\end{pmatrix}\right|+\left|\begin{pmatrix}-11-11\\-11-(-11)\\0-28\end{pmatrix}\right|$$

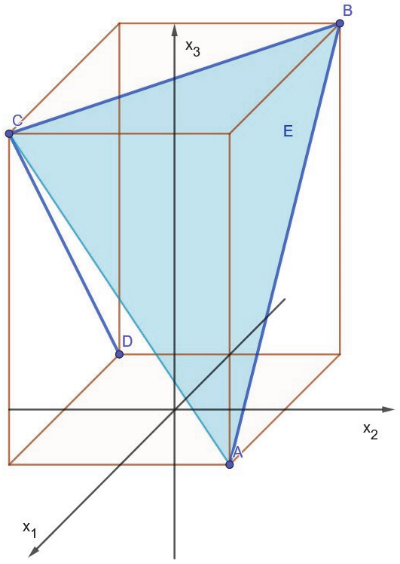
$$=\left|\begin{pmatrix}-22\\0\\28\end{pmatrix}\right|+\left|\begin{pmatrix}22\\-22\\0\end{pmatrix}\right|+\left|\begin{pmatrix}-22\\0\\-28\end{pmatrix}\right|$$

$$=\sqrt{(-22)^2+28^2}+\sqrt{22^2+(-22)^2}+\sqrt{(-22)^2+(-28)^2}$$

$$=\sqrt{1268}+\sqrt{968}+\sqrt{1268}=\underline{\underline{4\sqrt{317}+22\sqrt{2}\approx 102{,}33}}$$

Die Länge des Streckenzugs beträgt etwa **102,33 m**.

c)



$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-22\\0\\28\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}22\\-22\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}616\\616\\484\end{pmatrix}=44\cdot\begin{pmatrix}14\\14\\11\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}14\\14\\11\end{pmatrix}$$

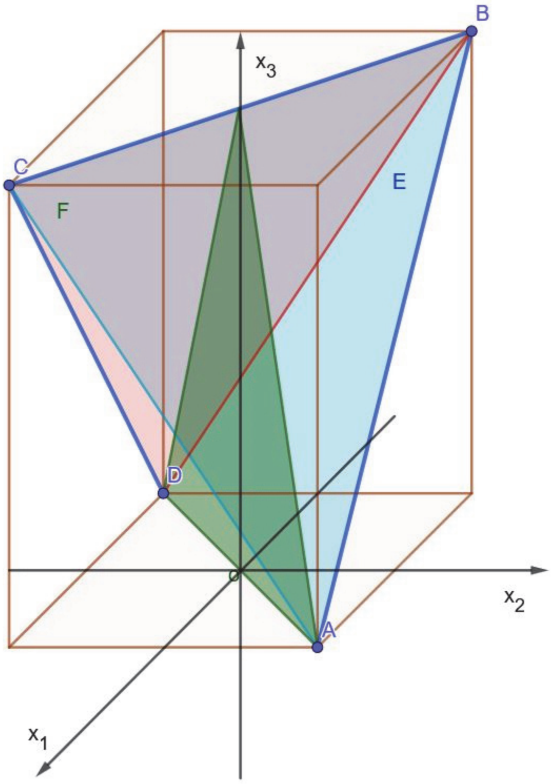
$\Rightarrow E: 14x_1+14x_2+11x_3+c=0$

A eingesetzt: $14\cdot 11+14\cdot 11+11\cdot 0+c=0 \;\Rightarrow c=-308$

$\Rightarrow \underline{\underline{E: 14x_1+14x_2+11x_3-308=0}}$

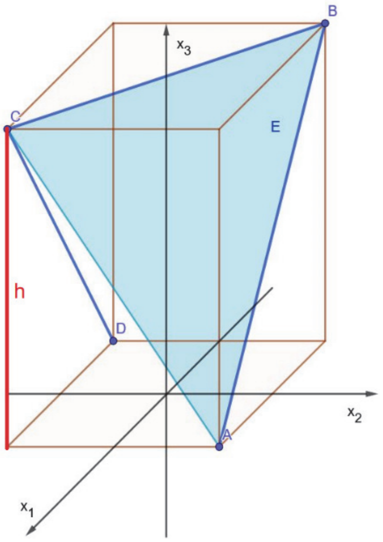
d) Der gesuchte Winkel ist der zwischen den Normalenvektoren der beiden Ebenen:

$$\cos\varphi=\frac{\begin{pmatrix}14\\14\\11\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}14\\14\\11\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}=\frac{11}{\sqrt{14^2+14^2+11^2}\cdot 1}=\frac{11}{\sqrt{513}}\Rightarrow\underline{\underline{\varphi\approx 60{,}94^\circ}}$$



Der Winkel α zwischen den Ebenen E und F ist der Winkel an der Spitze des grün markierten Dreiecks mit Basis [AD]. Wegen der Symmetrie von B und C zur x_3-Achse sind auch A und D symmetrisch zur x_3-Achse. Das Dreieck ist daher gleichschenklig, es gilt also: $\underline{\underline{\alpha = 180^\circ - 2\varphi}}$

e)

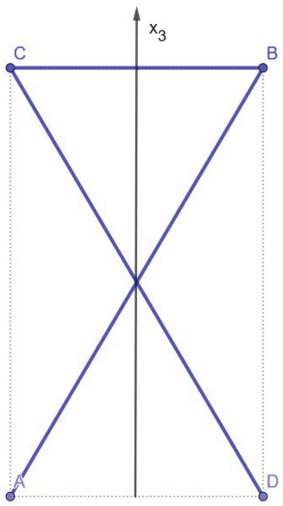


Das Volumen der Pyramide beträgt $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G_{Pyramide} \cdot h$,

das Volumen des Quaders $V_{Quader} = G_{Quader} \cdot h$, wobei Pyramide und Quader die gleiche Höhe besitzen und die Grundfläche der Pyramide genau die halbe Grundfläche des Quaders ist. $\Rightarrow V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot G_{Quader} \cdot h = \frac{1}{6} \cdot V_{Quader}$

Der Anteil des Pyramidenvolumens am Quadervolumen beträgt also $\frac{1}{6}$.

f) Hier muss man das Polygon gedanklich drehen:

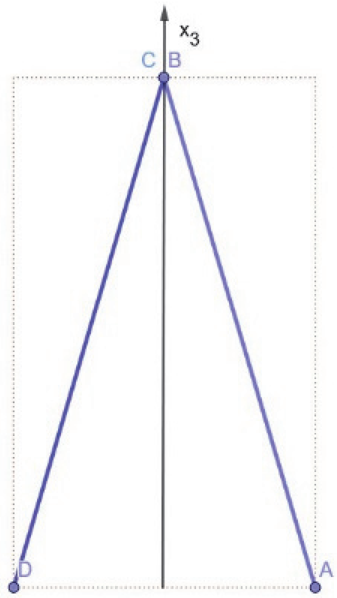


Dreht man im Uhrzeigersinn, so entsteht obige Abbildung. In diesem Fall schaut man von der **positiven** x_2-Achse aus auf das Polygon. Ein möglicher Vektor ist $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Würde man weiter drehen, schaut man von der **negativen** x_2-Achse mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf das Polygon. Dann wäre D links und A rechts.

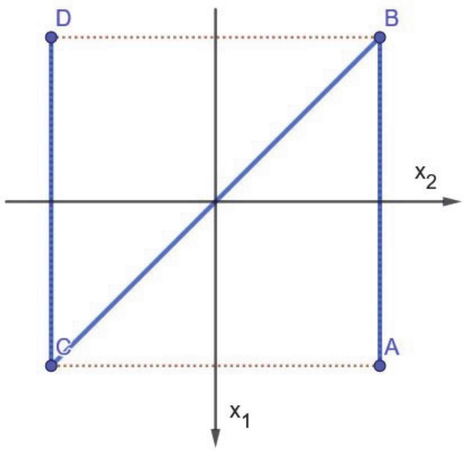
Dreht man gegen den Uhrzeigersinn, so entsteht die Abbildung unten (umgedrehtes V). In diesem Fall schaut man von der Winkelhalbierenden zwischen der **positiven** x_1-Achse und der **negativen** x_2-Achse auf das Polygon.

Die Punkte B und C werden zu einem Punkt. Ein möglicher Vektor ist $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Würde man weiter drehen, schaut man von der anderen Seite auf das Polygon. Dann wäre A links und D rechts. Der Vektor wäre dann $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Von oben betrachtet ergibt sich das folgende umgedrehte Z:



g) Der Punkt P liegt auf der x_3-Achse. Der Abstand von P zur Strecke [AB] ist die Länge des Lots [PQ] auf die Gerade AB. Q liegt dabei zwischen A und B (I).

Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ muss dabei senkrecht stehen auf $\overrightarrow{AB}$, das Skalarprodukt der beiden Vektoren muss entsprechend null ergeben (II).

Die Länge des Vektors $\overrightarrow{PQ}$ muss dabei gleich sein wie der Abstand des Punktes P von der Seite [BC]. Da die Höhe des Quaders 28 beträgt, ist dieser Abstand $28-h$. (III)