Analysis Aufgabengruppe 2

1 $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$

a) **Symmetrie**

$f(-x) = (-x) \cdot e^{-\frac{1}{2}(-x)^2+\frac{1}{2}} = -x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} = -f(x)$

$\Rightarrow$ Der Graph von f ist symmetrisch zum Ursprung.

Nullstelle

Da die e-Funktion nicht null werden kann, ist die einzige Nullstelle bei $x = 0$.

Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{x}_{\to\infty} \cdot \underbrace{e^{\overbrace{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}^{\to-\infty}}}_{\to 0} = "\infty \cdot 0" = \underline{\underline{0}}$$

b) $f'(x) = 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} + x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} \cdot (-x) = e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}(1 + x \cdot (-x)) = \underline{\underline{e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}\left(1 - x^2\right)}}$

c) **Monotonieverhalten**

$$f'(x) = \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}}_{>0}\left(1 - x^2\right)$$

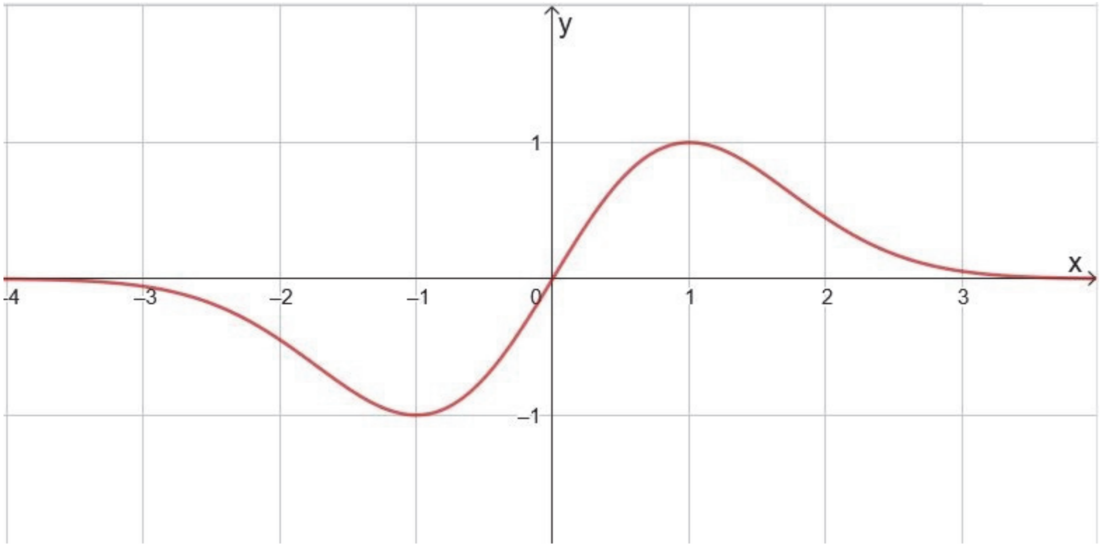
Der 1. Faktor der Ableitung ist immer positiv, der 2. lässt sich als nach unten geöffnete Normalparabel interpretieren. Diese ist nur positiv zwischen ihren Nullstellen.

$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 1$

Daraus ergibt sich:

$x \in$	$]-\infty;-1[$	$]-1;1[$	$]1;+\infty[$
$f'(x)$	< 0	> 0	< 0
Graph	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

$f(1) = 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow HOP(1/1)$ und $TIP(-1/-1)$ (wg. Symmetrie)



d) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}dx = -\int_0^1 -x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}dx = -\left[e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}\right]_0^1$

$= -\left[e^{-\frac{1}{2}\cdot 1^2+\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}\cdot 0^2+\frac{1}{2}}\right] = -\left[e^0 - e^{\frac{1}{2}}\right] = -\left[1-\sqrt{e}\right] = \underline{\underline{\sqrt{e}-1}}$

e) $F(w)-F(0) \approx \int_0^{2022} f(x)dx \Rightarrow \int_0^w f(x)dx \approx \int_0^{2022} f(x)dx$

Die Fläche, die vom Graphen von f, der Geraden $x = w$ und der x-Achse eingeschlossen wird, nimmt für $w > 2022$ nahezu nicht mehr zu, da sich der Graph der waagrechten Asymptote annähert.

2 $f_a(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot x^2 + \frac{1}{2}}$

a) $\underline{f_a(1) = 1}$: $1 \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot 1^2 + \frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} = \ln 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}a = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \underline{\underline{a = 1}}$

Genau ein Graph der Schar enthält also den Punkt (1/1), nämlich der Graph von f_1.

b) $f_0(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot x^2 + \frac{1}{2}} = x \cdot e^{\frac{1}{2}}$

Die Gerade hat die Steigung $e^{\frac{1}{2}}$ und geht durch den Ursprung (0/0).

c)
- $f_a(0) = 0$: Alle Graphen der Schar gehen durch den Ursprung.
- $f_a'(0) = f_0'(0)$: Alle Graphen der Schar haben im Ursprung die Steigung $e^{\frac{1}{2}}$.
- $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x) \Leftrightarrow a_1 = a_2$ oder $x = 0$: Einziger gemeinsamer Punkt der Graphen der Schar ist der Ursprung. Sonst schneiden sich auch zwei beliebige Graphen der Schar nicht.

d) Für den gestreckten Graphen gilt:

$$f_a(x) = \underbrace{k}_{y-\text{Richtung}} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{k} \cdot x}_{x-\text{Richtung}} \right) \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{k}}_{x-\text{Richtung}} \cdot x \right)^2 + \frac{1}{2}} = x \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{k^2} \cdot x^2 + \frac{1}{2}}$$

Diese Funktion gehört auch zur Schar, da lediglich die Konstante a im Exponenten der e-Funktion durch die Konstante $\frac{a}{k^2}$ ersetzt wird.

e) $a \cdot x^2 = 1 \quad \Rightarrow x^2 = \frac{1}{a}$

Die Gleichung hat keine Lösung für $a \leq 0$. In diesem Fall hat der Graph keinen Extrempunkt (Gruppe II).

Für $a > 0$ hat die Gleichung die beiden Lösungen $x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{a}}$.

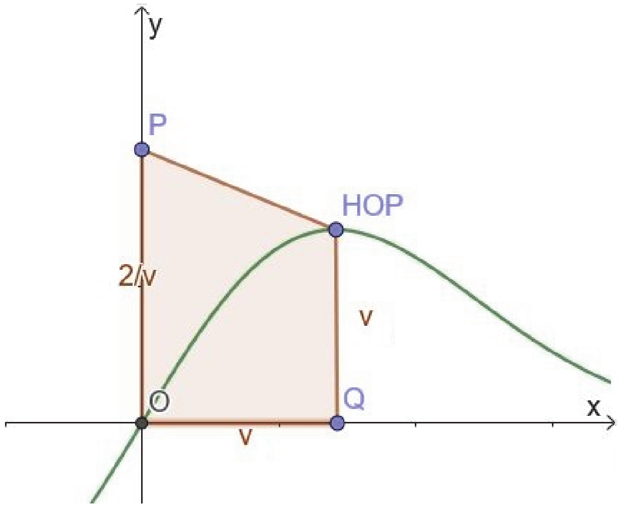
Der Graph hat dann zwei Extrempunkte (Gruppe I).

f) Gesucht ist die Gleichung der Ortskurve. Dazu brauchen wir zunächst die Extrempunkte:

$$f_a\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)=\sqrt{\frac{1}{a}}\cdot e^{-\frac{1}{2}a\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{a}}\cdot e^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{a}}\quad\Rightarrow E\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\,/\,\sqrt{\frac{1}{a}}\right)$$

Alle Punkte E haben die gleiche x- und y-Koordinate und liegen somit auf der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten mit der Gleichung $y=x$.

g) $HOP(v\,/\,v);\ P\left(0\,/\,\frac{2}{v}\right);\ O(0\,/\,0);\ Q(v\,/\,0)$



Es handelt sich um ein Trapez mit den beiden parallelen Seiten mit den Längen v und $\frac{2}{v}$ sowie der Höhe v. Für den Flächeninhalt gilt dann: $A(v)=\frac{1}{2}\left(v+\frac{2}{v}\right)\cdot v$

$\underline{A(v)=49}$: $\frac{1}{2}\left(v+\frac{2}{v}\right)\cdot v=49\quad\Rightarrow\frac{1}{2}v^2+1=49\quad\Rightarrow\frac{1}{2}v^2=48\quad\Rightarrow v^2=96$

$$\Rightarrow v_1=\sqrt{96}=4\sqrt{6}\approx 9{,}8;\ (v_2=-4\sqrt{6}<0)$$

Gemäß Teilaufgabe e gilt: $v=\sqrt{\frac{1}{a}}\quad\Rightarrow\sqrt{96}=\sqrt{\frac{1}{a}}\quad\Rightarrow 96=\frac{1}{a}\quad\Rightarrow \underline{\underline{a=\frac{1}{96}}}$