Analysis Aufgabengruppe 1

$f(x)=2\cdot\sqrt{10x-x^2};\ D_f=[0;10]$

a) **Nullstellen**

$\underline{f(x)=0}:\ 2\cdot\sqrt{10x-x^2}=0 \quad\Rightarrow 10x-x^2=0 \ \Rightarrow x(10-x)=0 \quad\Rightarrow \underline{\underline{x_1=0}};\ \underline{\underline{x_2=10}}$

b) **Hochpunkt**

$$f'(x)=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{10x-x^2}}\cdot(10-2x)\ =\frac{10-2x}{\sqrt{10x-x^2}}$$

$$\underline{f'(x)=0}:\ \frac{10-2x}{\sqrt{10x-x^2}}=0 \quad\Rightarrow 10-2x=0 \quad\Rightarrow 2x=10 \quad\Rightarrow x'=5$$

Dies ist die einzige Nullstelle der Ableitung, daher besitzt der Graph von f in genau einem Punkt eine waagrechte Tangente. Da f stets positiv ist, muss es sich um einen Hochpunkt handeln.

$f(5)=2\cdot\sqrt{10\cdot5-5^2}=2\cdot5=10 \ \Rightarrow \underline{\underline{HOP(5/10)}}$

c) Da der Graph von f rechtsgekrümmt ist, gilt: $f''(x)<0$

Da bei beiden Termen der Zähler und die Wurzel im Nenner stets positiv sind, hängt das Vorzeichen der 2. Ableitung von der Klammer im Nenner ab.

Wir setzen z.B. $x=5$ in beide Terme ein:

$$\text{I}\quad f''(5)=\frac{50}{\underbrace{(5^2-10\cdot5)}_{<0}\sqrt{10\cdot5-5^2}}<0$$

$$\text{II}\quad f''(5)=\frac{50}{\underbrace{(10\cdot5-5^2)}_{>0}\sqrt{10\cdot5-5^2}}>0$$

Daher stellt **Term I** die 2. Ableitung von f dar.

d) $$f(5-x)=2\cdot\sqrt{10(5-x)-(5-x)^2}\ =2\cdot\sqrt{50-10x-(25-10x+x^2)}$$
$$=2\cdot\sqrt{50-10x-25+10x-x^2}\ =2\cdot\sqrt{-x^2+25}$$

$$f(5+x)=2\cdot\sqrt{10(5+x)-(5+x)^2}\ =2\cdot\sqrt{50+10x-(25+10x+x^2)}$$
$$=2\cdot\sqrt{50+10x-25-10x-x^2}\ =2\cdot\sqrt{-x^2+25}=f(5-x)$$

Der y-Wert aller Punkte in gleichem Abstand von $x=5$ (x-Wert des HOP) ist immer gleich. Daher ist der Graph symmetrisch zur Gerade $x=5$.

e) $f'(x)=\dfrac{10-2x}{\sqrt{10x-x^2}}$

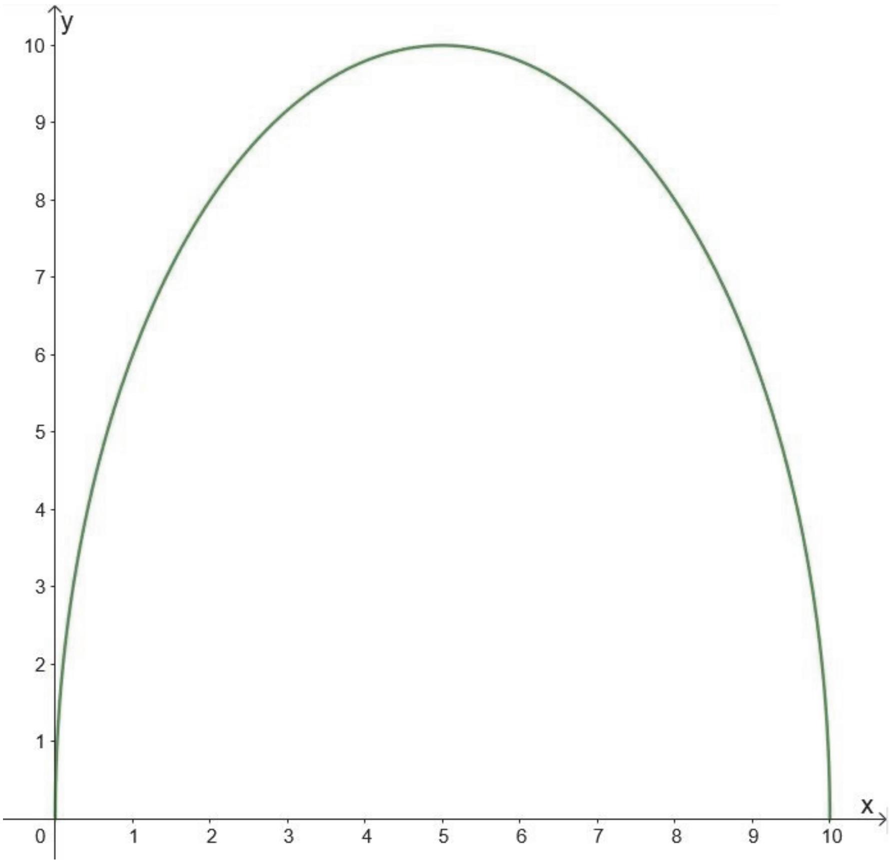
Der Term unter der Wurzel muss immer positiv sein. Er lässt sich als nach unten geöffnete Normalparabel interpretieren. Diese ist positiv zwischen den Nullstellen.

$\Rightarrow \underline{\underline{D_{f'}=\,]0;10[}}$

$\lim\limits_{x\to 0+0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{10-2x}{\sqrt{10x-x^2}}=\text{"}\dfrac{10}{0^+}\text{"}=+\infty$

Der Graph von f hat im Ursprung eine **senkrechte Tangente**.

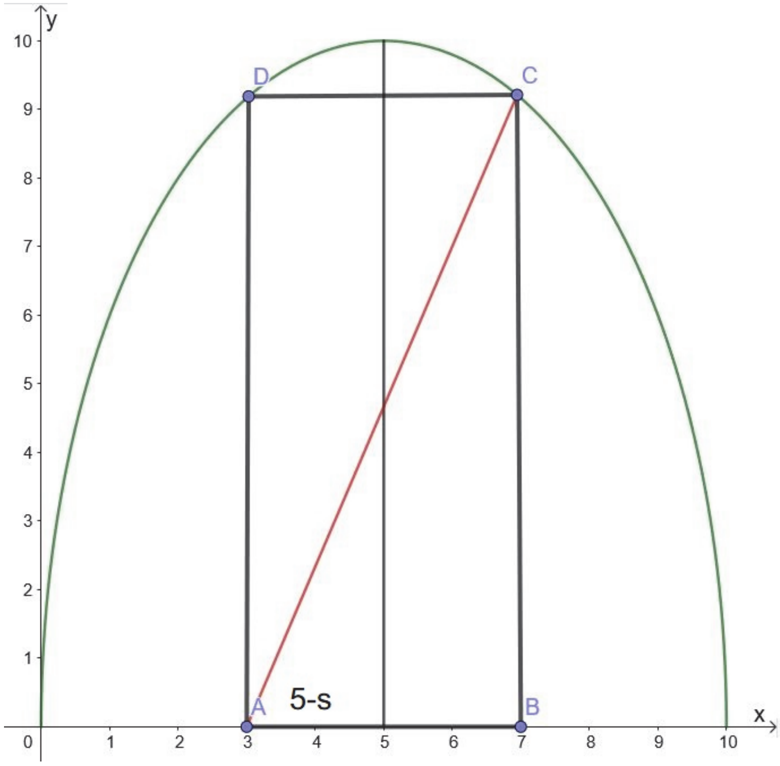
f) $f(8)=2\cdot\sqrt{10\cdot 8-8^2}=2\cdot 4=\underline{\underline{8}}$



g) $f'(2)=\dfrac{10-4}{\sqrt{20-2^2}}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

Es gilt: $\tan\varphi=\dfrac{3}{2}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\varphi\approx 56{,}31^\circ}}$

h)



Das Rechteck hat die Seiten $2(5-s)$ und $f(s)=2\cdot\sqrt{10s-s^2}$.

Im Dreieck ABC gilt der Satz des Pythagoras:

$$\overline{AC}^2=(2(5-s))^2+\left(2\cdot\sqrt{10s-s^2}\right)^2 \quad\Rightarrow \overline{AC}^2=4(25-10s+s^2)+4\cdot(10s-s^2)$$

$$\Rightarrow \overline{AC}^2=100-40s+4s^2+40s-4s^2 \quad\Rightarrow \overline{AC}^2=100 \quad\Rightarrow \underline{\underline{\overline{AC}=10}}$$

i) Bei einer Höhe des Bohrlochs von 3,6 m beträgt die Spritzweite 9,6 m.

j) $\underline{f(x)=6}$: $2\cdot\sqrt{10x-x^2}=6 \quad\Rightarrow \sqrt{10x-x^2}=3 \quad\Rightarrow 10x-x^2=9 \quad\Rightarrow x^2-10x+9=0$

$$\Rightarrow x_{1/2}=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=\frac{10\pm 8}{2} \quad\Rightarrow x_1=9;\ x_2=1$$

Das Loch kann in 1 m oder in 9 m Höhe gebohrt werden.
Wird das Loch in 5 m Höhe gebohrt, so ist die Spritzweite maximal (10 m).

k) g(t) ist die momentane Änderungsrate. Wir brauchen die Stammfunktion G(t), die das Volumen in dem Speicher angibt:

$$G(t)=0{,}25\cdot\frac{t^2}{2}-25t+c=0{,}125t^2-25t+c\,;$$

$$G(0)=c;\ G(60)=0{,}125\cdot 60^2-25\cdot 60+c=-1050+c$$

In der ersten Minute sind **1 050 Liter** abgeflossen.