Analysis Aufgabengruppe 1

1 $h(x)=3x(-1+\ln x);\ D_h=\mathrm{IR}^+$

a) $h'(x)=3\cdot(-1+\ln x)+3x\cdot\frac{1}{x}=-3+3\ln x+3=3\ln x$

$m=h'(e)=3\ln e=3$

$t(x)=mx+t$; m und (e/0) eingesetzt: $0=3e+t\ \Rightarrow t=-3e$

$\Rightarrow \underline{\underline{t(x)=3x-3e}}$

$\tan\varphi=3\ \Rightarrow \underline{\underline{\varphi=71{,}57^{\circ}}}$

b) $\underline{h'(x)=0}$: $3\ln x=0\ \Rightarrow \ln x=0\ \Rightarrow x'=1;\quad h''(x)=\frac{3}{x};$

$$\left.\begin{cases} h''(1)=\frac{3}{1}=3>0 \\ h(1)=3\cdot(-1+0)=-3 \end{cases}\right\}\Rightarrow \mathrm{TIP}(1/-3)$$

Monotonie: $x\in\left]0;1\right[$: h ist streng monoton **abnehmend**.

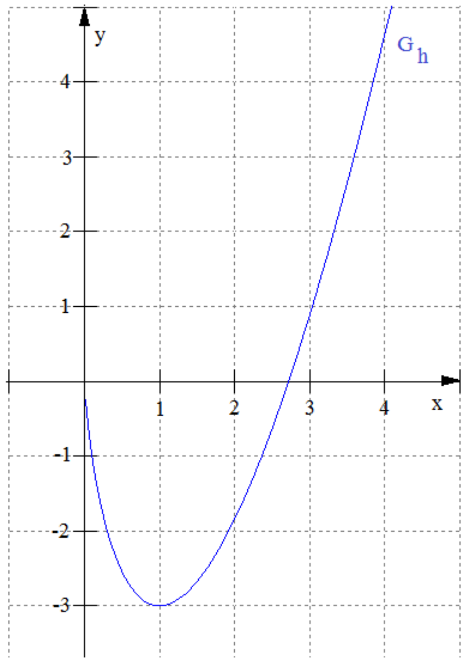
$x\in\left]1;\infty\right[$: h ist streng monoton **zunehmend**.

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\underbrace{3x}_{\to\infty}\underbrace{(-1+\underbrace{\ln x}_{\to\infty})}_{\infty}}=\text{"}\infty\cdot\infty\text{"}=\underline{\underline{\infty}}$$

Der TIP (s.o.) ist das einzige relative Extremum im Definitionsbereich. Das Monotonieverhalten kann sich daher außer im TIP nicht noch einmal ändern. TIP ist daher ein absoluter Tiefpunkt. $\Rightarrow \underline{\underline{W_h=\left[-3;\infty\right[}}$

c) $$\lim_{x\to0+0}h(x)=\lim_{x\to0+0}\underbrace{3x}_{\to0^+}\underbrace{(-1+\underbrace{\ln x}_{\to-\infty})}_{-\infty}=\text{"}0^+\cdot(-\infty)\text{"}=\underline{\underline{0^-}}$$

$$\lim_{x\to0+0}h'(x)=\lim_{x\to0+0}3\ln x=\underline{\underline{-\infty}}$$



d) $D_{(h^*)^{-1}} = W_{h^*} = \underline{\underline{[-3;\infty[}}\,;\quad W_{(h^*)^{-1}} = D_{h^*} = \underline{\underline{[1;\infty[}}$

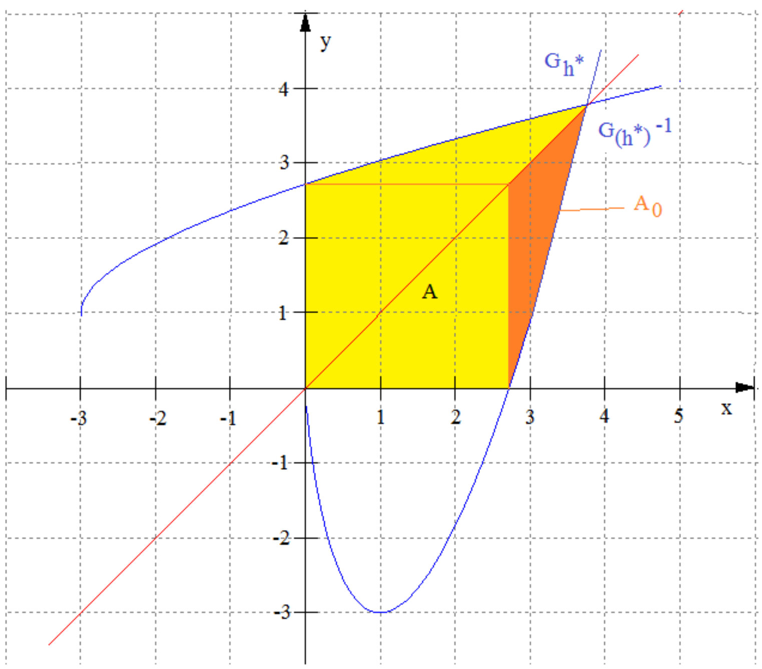
$$\underline{h^*(x) = x}:\ 3x(-1+\ln x) = x \quad |:x\ \ (\neq 0)$$

$$\Rightarrow 3(-1+\ln x) = 1 \quad |:3$$

$$\Rightarrow -1+\ln x = \frac{1}{3} \quad |+1$$

$$\Rightarrow \ln x = \frac{4}{3} \qquad \Rightarrow x = e^{\frac{4}{3}} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{S\left(e^{\frac{4}{3}} / e^{\frac{4}{3}}\right)}}$$

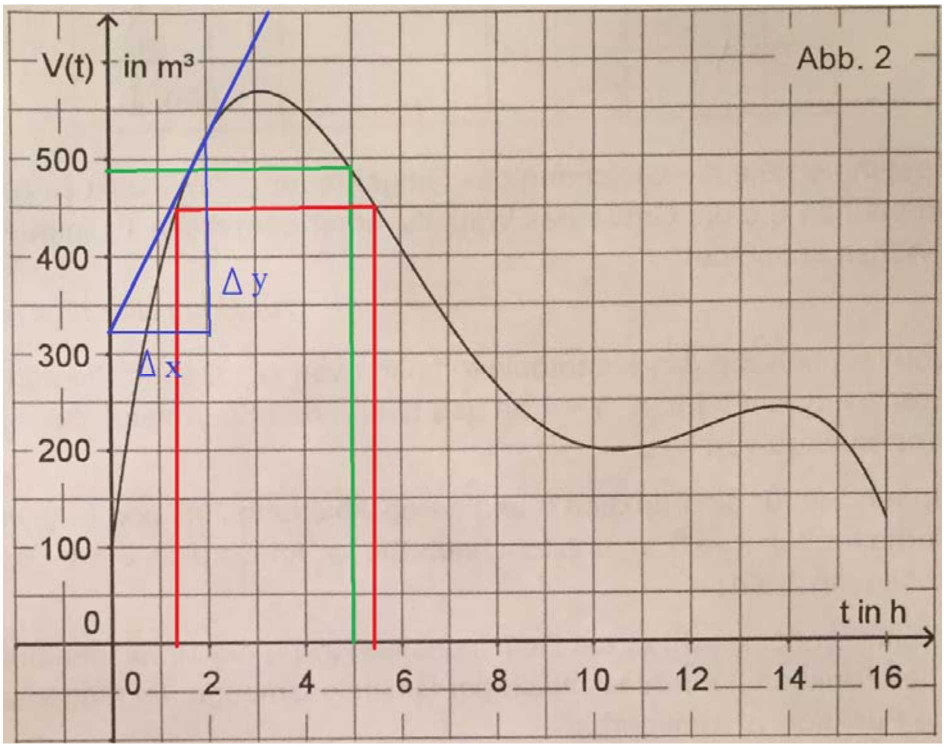
e, f)



$A = e \cdot e + 2 \cdot A_0 = \underline{\underline{e^2 + 2A_0}}$

2

a)



$V(5) \approx \underline{\underline{480\,m^3}}$; Zeitraum ca.: $\underline{\underline{1{,}3 \le x \le 5{,}5}}$

b) Ablesen der Tangentensteigung $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$: $V'(2) \approx \frac{525-325}{2-0} = \underline{\underline{100\frac{m^3}{h}}}$

c) In sechs Stunden nimmt das Volumen des Wassers um 350 m^3 ab.

$V(11) \approx 200;\ \ V(5) \approx 480;\ \ \Delta V = 280$

Für $t = 5$ gilt diese Beziehung **nicht** (genau).

d) $g(t) = 0{,}4(2t^3 - 39t^2 + 180t);\ \ g'(t) = 0{,}4(6t^2 - 78t + 180)$

$\underline{g(t) = 0}$: $0{,}4t(2t^2 - 39t + 180) = 0 \ \Rightarrow t_1 = 0$

$$2t^2 - 39t + 180 = 0 \ \Rightarrow t_{2/3} = \frac{39 \pm \sqrt{39^2 - 4\cdot 2\cdot 180}}{2\cdot 2} = \frac{39 \pm 9}{4} \ \Rightarrow t_2 = 7{,}5;\ t_3 = 12$$

$g'(0) = 0{,}4\cdot 180 = 72 > 0;\ \ g'(7{,}5) = 0{,}4(337{,}5 - 585 + 180) = 0{,}4\cdot(-67{,}5) < 0$;
$g'(12) = 0{,}4(864 - 936 + 180) = 43{,}2 > 0$

An der Stelle $t_1 = 0$ ist der Graph von g steigend, bei $t_2 = 7{,}5$ fallend, daher sind die Funktionswerte für $0 < t < 7{,}5$ positiv (Graph oberhalb der x-Achse).

An der Stelle $t_3 = 12$ ist der Graph von g wieder steigend, daher sind die Funktionswerte für $7{,}5 < t < 12$ negativ (Graph unterhalb der x-Achse).

e) $\int_a^b g(t)\,dt$: mittlere Änderungsrate des Volumens zwischen zwei Zeitpunkten für

$0 < t < 12$.

Die Stammfunktion G(t) gibt das Volumen zum Zeitpunkt t an.

Es gilt: $G(t) = 0{,}4\left(\frac{2t^4}{4} - \frac{39t^3}{3} + \frac{180t^2}{2}\right) + C = 0{,}4\left(\frac{t^4}{2} - 13t^3 + 90t^2\right) + C$

$$G(0) = 150 \;\Rightarrow c = 150 \;\Rightarrow G(t) = 0{,}4\left(\frac{t^4}{2} - 13t^3 + 90t^2\right) + 150$$

$$G(7{,}5) = 0{,}4\left(\frac{7{,}5^4}{2} - 13\cdot 7{,}5^3 + 90\cdot 7{,}5^2\right) + 150 \approx \underline{\underline{614{,}06\,m^3}}$$

Die Ableitung von G ($G'(t) = g(t)$) hat an der Stelle $x = 7{,}5$ eine einfache Nullstelle (siehe d). Links der Nullstelle ist die Ableitung positiv, rechts negativ. Daher hat G an dieser Stelle ein relatives Maximum. Da es keine weiteren Nullstellen der Ableitung zwischen 0 und 12 gibt, ist das Volumen nach 7,5 Stunden absolut am größten.

