Stochastik Aufgabengruppe 2

1 Eine Ausschuss-Problematik! Die drei gleichfarbigen Gummibärchen können weiß oder grün sein, nicht aber rot, da es hiervon nur zwei gibt.

$$P(\text{"Die Gummibärchen haben alle die gleiche Farbe"}) = \frac{\overbrace{\binom{5}{3}}^{\text{alle weiß}} + \overbrace{\binom{3}{3}}^{\text{alle grün}}}{\binom{10}{3}} = \underline{\underline{\frac{11}{120}}}$$

2 X: Anzahl der roten Gummibärchen in einer Tüte

a) $$P\left(X > \frac{1}{3}\cdot 50\right) = P\left(X > 16\frac{2}{3}\right) = P(X \geq 17) = 1 - P(X \leq 16)$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{16} B(50;0,25;i) \overset{TW}{=} 1 - 0,90169 = \underline{\underline{0,09831 \approx 9,8\%}}$$

b) $$\sum_{k=0}^{3}\left(0,75^k \cdot 0,25\right) = \underbrace{0,75^0 \cdot 0,25}_{r} + \underbrace{0,75^1 \cdot 0,25}_{\bar{r}r} + \underbrace{0,75^2 \cdot 0,25}_{\bar{r}\bar{r}r} + \underbrace{0,75^3 \cdot 0,25}_{\bar{r}\bar{r}\bar{r}r}$$

Ereignis: Das erste rote Gummibärchen ist spätestens das vierte, das aus der Öffnung fällt.

c) Eine 3-mal-Mindestens-Aufgabe in der Variante „Trefferquote p gesucht“.

X: Anzahl der gelben Gummibärchen

$$P(X \geq 1) \geq 0,95 \quad \Rightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0,95 \Rightarrow P(X = 0) \leq 0,05$$

$$\Rightarrow \underbrace{\binom{50}{0}}_{=1} \cdot \underbrace{p^0}_{=1} \cdot (1-p)^{50} \leq 0,05 \quad \Rightarrow (1-p)^{50} \leq 0,05 \quad \Rightarrow 1 - p \leq 0,05^{\frac{1}{50}}$$

$$\Rightarrow p \geq 1 - 0,05^{\frac{1}{50}} = 0,05816$$

Der Anteil der gelben Gummibärchen muss **mindestens 6 %** betragen.

3

a) $P(\overline{V}) = 3 \cdot P(V)$; $P_V(R) = 0{,}42$; $P(\overline{V} \cap \overline{R}) = 0{,}63$

I $\quad P(V) + P(\overline{V}) = 1 \Rightarrow P(V) + 3 \cdot P(V) = 1 \Rightarrow 4 \cdot P(V) = 1 \quad P(V) = 0{,}25$

II $\quad P_V(R) = \dfrac{P(R \cap V)}{P(V)} \Rightarrow 0{,}42 = \dfrac{P(R \cap V)}{P(V)}$;

I in II $\quad 0{,}42 = \dfrac{P(R \cap V)}{0{,}25} \Rightarrow P(R \cap V) = 0{,}42 \cdot 0{,}25 = 0{,}105$

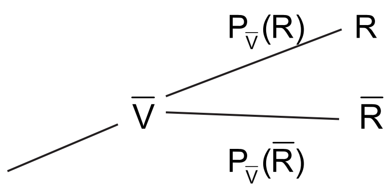
Jetzt kann eine Vierfeldertafel erstellt werden. Bekannte und gerade berechnete Größen sind grün gedruckt;

	V	$\overline{V}$	
R	0,105	0,12	0,225
$\overline{R}$	0,145	0,63	0,775
	0,25	0,75	1

$P(\overline{R}) = \underline{\underline{0{,}775 = 77{,}5\%}}$

b) $P_{\overline{V}}(R) = \dfrac{P(R \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \dfrac{0{,}12}{0{,}75} = \underline{\underline{0{,}16 = 16\%}}$

c) $1 - P_{\overline{V}}(R)$: Lösung mit einem Baumdiagramm:



Der Term beschreibt den Anteil der nicht als zuckerreduziert gekennzeichneten Tüten an den nicht als vegan gekennzeichneten Tüten.

oder alternativ: Wahrscheinlichkeit, dass eine nicht als vegan gekennzeichnete Tüte auch nicht als zuckerreduziert gekennzeichnet ist.

4

a) Der Erwartungswert beträgt 1:

$$0\cdot p_0+1\cdot p_1+2\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}1=1 \quad\Rightarrow p_1+0{,}4+0{,}3=1 \Rightarrow \underline{\underline{p_1=0{,}3}}$$

Außerdem ist die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1:

$$p_0+0{,}3+0{,}2+0{,}1=1 \quad\Rightarrow \underline{\underline{p_0=0{,}4}}$$

$$\mathrm{Var}(X)=0^2\cdot 0{,}4+1^2\cdot 0{,}3+2^2\cdot 0{,}2+3^2\cdot 0{,}1-\underbrace{1^2}_{[E(X)]^2}$$

$$=0{,}3+0{,}8+0{,}9-1=\underline{\underline{1}}$$

b) Für die relative Standardabweichung gilt:

$$\sigma_{rel}=\frac{\sigma}{E(Y_n)}=\frac{\sqrt{\mathrm{Var}(Y_n)}}{E(Y_n)}=\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^1}=n^{-\frac{1}{2}}$$

Die relative Standardabweichung soll 5 % betragen:

$$n^{-\frac{1}{2}}=0{,}05 \quad\Rightarrow n=0{,}05^{-2}=\underline{\underline{400}}$$