Geometrie Aufgabengruppe 2

$A(5/5/0)$, $B(-5/5/0)$, $C(-5/-5/0)$, $D(5/-5/0)$,
$E(2/0/4)$, $F(0/2/4)$, $G(-2/0/4)$, $H(0/-2/4)$

a) $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 0-5 \\ 2-5 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} 0-(-5) \\ 2-5 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$;

$$\overrightarrow{AF} \circ \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = -5 \cdot 5 + (-3)(-3) + 4 \cdot 4 = 0$$

$\Rightarrow$ Das Dreieck ABF ist bei F rechtwinklig.

b) Für die Ebenengleichung nehmen wir A als Aufpunkt sowie $\overrightarrow{AF}$ und $\overrightarrow{BF}$ als Richtungsvektoren (s.o.):

Für die Koordinatenform bilden wir das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow W: 4x_2 + 3x_3 + c = 0$

Einsetzen von A: $4 \cdot 5 + 3 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = -20 \quad \Rightarrow \underline{\underline{W: 4x_2 + 3x_3 - 20 = 0}}$

W ist parallel zur x_1 – Achse.

c) Das Quadrat ABCD liegt in der x_1x_2 – Ebene. Der gesuchte Winkel ist der Winkel zwischen den Normalenvektoren der x_1x_2 – Ebene und der Ebene W:

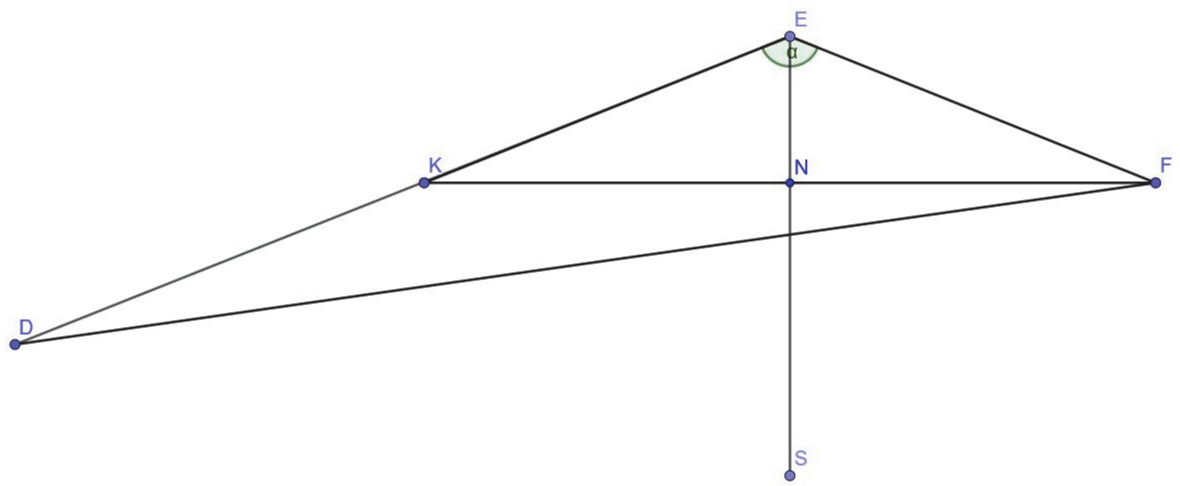
$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{0+0+3}{\sqrt{0^2+4^2+3^2} \cdot \sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \underline{\underline{\varphi \approx 53{,}13^0}}$$

d) $\left|\overrightarrow{EF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0-2 \\ 2-0 \\ 4-4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2+2^2+0^2} = \sqrt{8}$

$$\left|\overrightarrow{ED}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5-2 \\ -5-0 \\ 0-4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+(-5)^2+(-4)^2} = \sqrt{50}$$

$$\vec{K} = \vec{E} + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{50}} \cdot \overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 0{,}4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}2 \\ -2 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{K(3{,}2 / -2 / 2{,}4)}}$$

e)



Das Dreieck KFE ist gleichschenklig ($\overline{KE} = \overline{EF}$). Die Basis [KF] wird vom Mittelpunkt N halbiert. EN ist daher Symmetrieachse des Dreiecks und halbiert somit auch den Winkel bei E. Dieser Winkel ist auch Innenwinkel des Dreiecks DFE bei E (siehe Skizze), der daher ebenfalls von der Geraden EN halbiert wird.

Geradengleichung von EN

$$g: \vec{X} = \vec{E} + \lambda \cdot \overrightarrow{EN} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1{,}6-2 \\ 0-0 \\ 3{,}2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ 0 \\ -0{,}8 \end{pmatrix}$$

Liegt S(0/0/0) auf g?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ 0 \\ -0{,}8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{I } 0 = 2 - 0{,}4\lambda \Rightarrow \lambda = 5 \\ \text{II } 0 = 0 \\ \text{III } 0 = 4 - 0{,}8\lambda \Rightarrow \lambda = 5 \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung. Daher liegt S auf g.

f) Die Pyramide ABFS enthält die Seitenfläche ABF. Diese kommt in dem Körper viermal vor.

Die Pyramide HDES enthält die Seitenfläche HDE. Diese kommt in dem Körper ebenfalls viermal vor.

Die Pyramide EFGHS ist quasi der Deckel. Sie wird nur einmal benötigt. Grundfläche ist das Quadrat EFGH mit Seitenlänge $\sqrt{8}$ (siehe d). Die Höhe ist 4.

$$\Rightarrow V_{EFGHS} = \frac{1}{3}\cdot\left(\sqrt{8}\right)^2\cdot 4 = \frac{32}{3}$$

$$\Rightarrow V_{gesamt} = 4\cdot 33\frac{1}{3} + 4\cdot 13\frac{1}{3} + \frac{32}{3} = \underline{\underline{197\frac{1}{3}}}$$

g) Wegen der Symmetrie muss der Mittelpunkt M der Kugel auf einer Geraden liegen, die senkrecht auf der Grundfläche steht und S enthält, also auf der x_3 – Achse. M hat daher die Koordinaten M(0/0/m).

Da alle Ecken des Körpers auf der Kugel liegen sollen, muss z.B. gelten:

$$\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{ME}\right| \Rightarrow \left|\begin{pmatrix}5-0\\5-0\\0-m\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}2-0\\0-0\\4-m\end{pmatrix}\right| \quad \Rightarrow \sqrt{5^2+5^2+(-m)^2} = \sqrt{2^2+0^2+(4-m)^2}$$

$$\Rightarrow 50+m^2 = 4+(4-m)^2 \quad \Rightarrow 50+m^2 = 4+16-8m+m^2 \quad \Rightarrow 30 = -8m$$

$$\Rightarrow m = -3{,}75$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M(0/0/-3{,}75)}}$$

