Analysis Aufgabengruppe 1

1 $f(x)=\dfrac{6x}{x^2-4}$

a) Senkrechte Asymptoten

$\underline{\underline{x_1=-2}};\ \underline{\underline{x_2=2}}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{6x}{x^2-4}="\dfrac{\pm\infty^1}{\infty^2}"=0\ \Rightarrow$ die x-Achse ist waagrechte Asymptote.

b) Monotonieverhalten

$$f'(x)=\frac{(x^2-4)\cdot 6-6x\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{6x^2-24-12x^2}{(x^2-4)^2}=\frac{-6x^2-24}{(x^2-4)^2}=\frac{-6\cdot(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$$

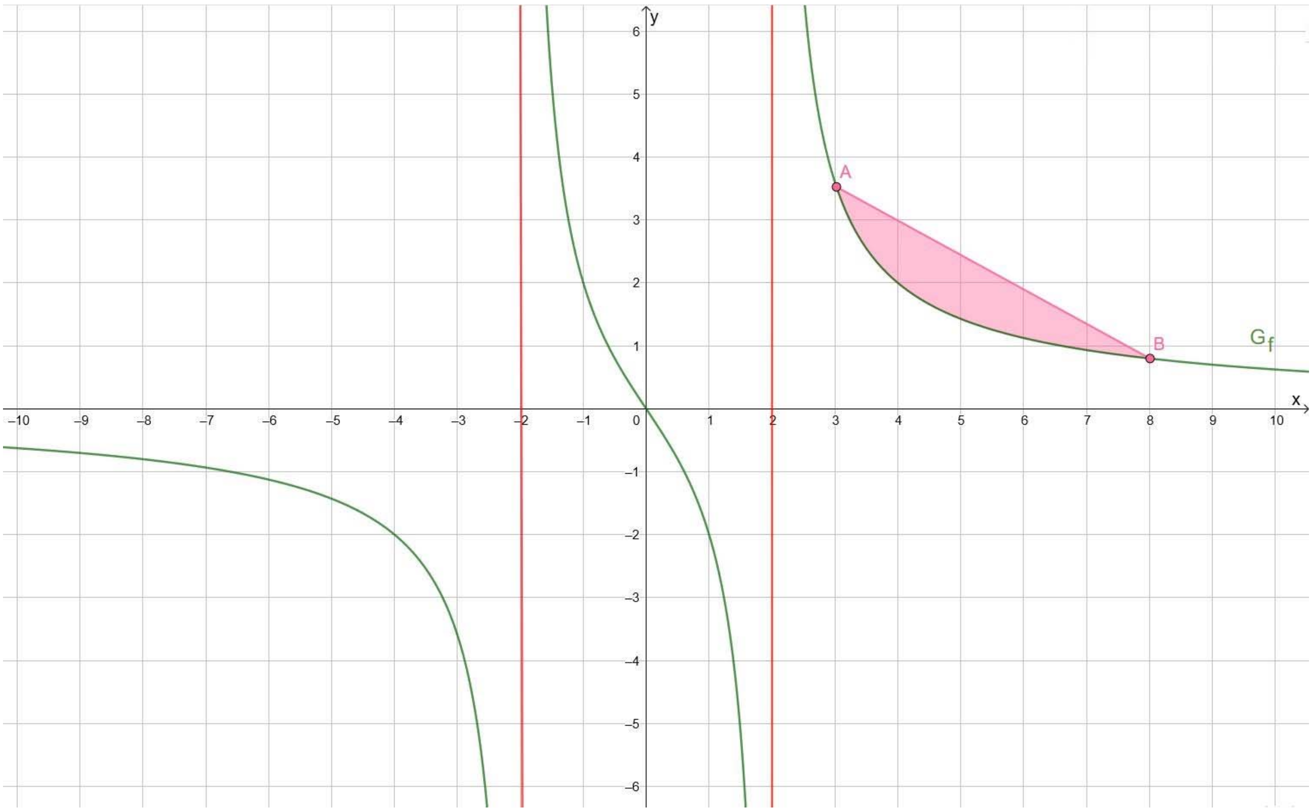
Der Zähler ist immer negativ, da die Klammer dort immer positiv ist.
Der Nenner ist wegen des Quadrats immer positiv.
Daher ist die Ableitung immer negativ. Es gilt:

$x\in$	$]-\infty;-2[$	$]-2;2[$	$]2;+\infty[$
$f'(x)$	<0	<0	<0
Graph			

Steigung der Tangente im Ursprung

$$m=f'(0)=\frac{-6\cdot(0^2+4)}{(0^2-4)^2}=\frac{-24}{16}=\underline{\underline{-1{,}5}}$$

c)



d) **Flächenberechnung**

Zunächst berechnen wir die Gerade AB. Dazu bestimmen wir erst die Steigung m und setzen dann den Punkt A in die Geradengleichung ein:

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3{,}6 - 0{,}8}{3 - 8} = \frac{2{,}8}{-5} = -0{,}56$$

$$\Rightarrow y = -0{,}56x + t$$

A(3/3,6) eingesetzt: $3{,}6 = -0{,}56 \cdot 3 + t \quad \Rightarrow 3{,}6 + 1{,}68 = t \quad \Rightarrow t = 5{,}28$

$$\Rightarrow y = -0{,}56x + 5{,}28$$

Jetzt berechnen wir die Fläche zwischen der Gerade AB und dem Graphen von f (Wurstfläche). Für die Stammfunktion von f gilt (fast genau) die Sonderformel aus der Merkhilfe (Zähler ist Ableitung des Nenners):

$$\int_3^8 -0{,}56x+5{,}28-\frac{6x}{x^2-4}\,dx=\int_3^8 -0{,}56x+5{,}28-3\cdot\frac{2x}{x^2-4}\,dx$$

$$=\left[\frac{-0{,}56x^2}{2}+5{,}28x-3\cdot\ln\left|x^2-4\right|\right]_3^8=\left[-0{,}28x^2+5{,}28x-3\cdot\ln\left|x^2-4\right|\right]_3^8$$

$$=\left[-0{,}28\cdot 8^2+5{,}28\cdot 8-3\cdot\ln\left|8^2-4\right|\right]-\left[-0{,}28\cdot 3^2+5{,}28\cdot 3-3\cdot\ln\left|3^2-4\right|\right]$$

$$=[-17{,}92+42{,}24-3\cdot\ln 60]-[-2{,}52+15{,}84-3\cdot\ln 5]$$

$$=[24{,}32-3\cdot\ln 60]-[13{,}32-3\cdot\ln 5]$$

$$=11-3\ln 60+3\ln 5$$

$$=11-3(\ln 60-\ln 5)$$

$$=11-3(\ln\frac{60}{5})$$

$$=11-3\ln 12\ (>0)\quad\Rightarrow \underline{\underline{A=11-3\ln 12\approx 3{,}545}}$$

2 $f_{a,b,c}(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+c}$

a) $f(x)=\dfrac{6x}{x^2-4}$: $\underline{\underline{a=6}}$; $\underline{\underline{b=0}}$; $\underline{\underline{c=-4}}$

b) Es ergibt sich folgende Funktion: $f_{a,b,c}(x)=\dfrac{b}{x^2+c}$

$$f_{a,b,c}(-x)=\frac{b}{(-x)^2+c}=\frac{b}{x^2+c}=f_{a,b,c}(x)$$

Der Graph ist daher symmetrisch zur y-Achse. Da $b\neq 0$, kann der Zähler und daher der ganze Bruch nicht null werden. Daher gibt es keinen Schnittpunkt mit der x-Achse.

c) Für die Definitionsmenge IR darf der Nenner nicht null werden. Es muss also gelten: $c>0$

Bei Punktsymmetrie zum Ursprung gilt: $f_{a,b,c}(-x)=-f_{a,b,c}(x)$

$$f_{a,b,c}(-x)=\frac{a(-x)+b}{(-x)^2+c}=\frac{-ax+b}{x^2+c}$$

$$-f_{a,b,c}(x)=-\frac{ax+b}{x^2+c}=\frac{-ax-b}{x^2+c}$$

Damit beide Terme gleich sind, muss gelten: $b=0\ \Rightarrow f_{a,b,c}(x)=\dfrac{ax}{x^2+c}$

Der Graph wäre identisch mit der x-Achse, wenn $f_{a,b,c}(x)=0$. Das ist der Fall für $a=0$. Es muss daher gelten: $a\neq 0$

d) $f'_{a,b,c}(x) = \dfrac{ax^2 + 2bx - ac}{\left(x^2 + c\right)^2}$

Der Graph von $f_{a,b,c}$ besitzt genau zwei Extrempunkte, wenn die Ableitung genau zwei einfache Nullstellen hat.

Damit es überhaupt zwei Nullstellen gibt, muss die Gleichung $ax^2 + 2bx - ac = 0$ zwei Lösungen haben. Das ist nur der Fall bei einer quadratischen Gleichung. Es muss also gelten: $a \neq 0$

Außerdem muss die Diskriminante positiv sein:
$D = (2b)^2 - 4 \cdot a \cdot (-ac) = \underbrace{4b^2}_{>0} + \underbrace{4a^2}_{>0} c$

Wenn $c > 0$, ist die Diskriminante auf jeden Fall positiv und es gibt zwei einfache Nullstellen der Ableitung. Der Graph von $f_{a,b,c}$ hat dann genau zwei Extrempunkte.

3 $p(x) = \dfrac{40}{(x-12)^2 + 4}$

a) $h(x) = \dfrac{5}{x^2 + 4}$

G_p geht aus G_h in zwei Schritten hervor:
- Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 8
- Verschiebung um 12 nach rechts.

$h(-x) = \dfrac{5}{(-x)^2 + 4} = \dfrac{5}{x^2 + 4} = h(x) \quad \Rightarrow G_h$ ist symmetrisch zur y-Achse.

Da die Streckung in y-Richtung das Symmetrieverhalten nicht verändert, ist nur die Verschiebung nach rechts relevant. Die Symmetrieachse verschiebt sich also auch um 12 nach rechts und hat bei G_p die Gleichung $x = 12$.

b) Die Leistung der Anlage soll weniger als 40 % von 10kW betragen, also weniger als 4kW. Dieser Wert wird laut Graph zweimal erreicht. Gesucht ist der rechte Wert im fallenden Teil des Graphen.

$\underline{p(x) = 4}$: $\dfrac{40}{(x-12)^2 + 4} = 4 \quad \Rightarrow 40 = 4\left((x-12)^2 + 4\right) \quad \Rightarrow 10 = (x-12)^2 + 4$

$\Rightarrow 6 = (x-12)^2 \quad \Rightarrow x - 12 = \pm\sqrt{6} \quad \Rightarrow x = 12 \pm \sqrt{6}$

$\Rightarrow x_1 = 12 + \sqrt{6} = 14{,}44948\ldots; \quad 0{,}44948 \cdot 60 \approx 27$ Minuten

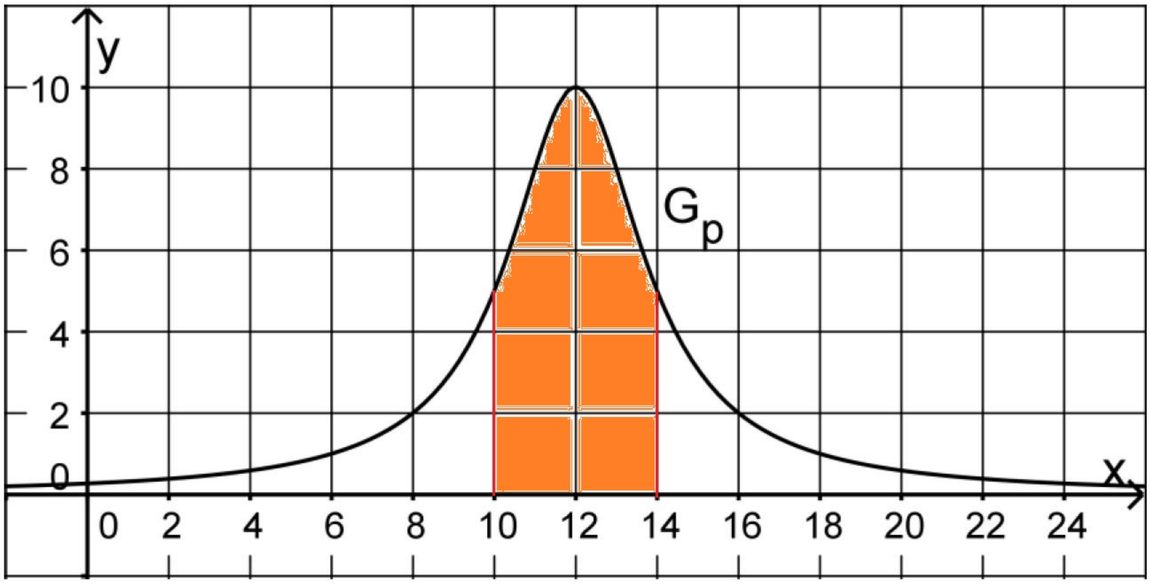
Ab **14:27 Uhr** beträgt die Leistung der Anlage weniger als 40 % ihres Tageshöchstwerts.

c) An der Wendestelle im steigenden Teil des Graphen ist dessen Steigung maximal, zu diesem Zeitpunkt nimmt die Leistung der Anlage am stärksten zu.

d) Die von 10 Uhr bis 14 Uhr eingespeiste Energie beträgt:

$$\int_{10}^{14} p(x)dx$$

Das ist die Fläche, die eingeschlossen wird von G_p, der x-Achse und den Geraden $x = 10$ und $x = 14$. Diese ergibt sich näherungsweise durch „Kästchen Zählen“:



Es ergeben sich ca. 8 Kästchen. Da ein Kästchen $4\ \text{cm}^2$ misst, beträgt die Fläche $32\ \text{cm}^2$. $1\ \text{cm}^2 = 1\ \text{kWh} \Rightarrow$ Es wurden 32 kWh eingespeist. Der Hauseigentümer erhält hierfür $32 \cdot 0{,}10\ € = 3{,}20\ €$.