Analysis Aufgabengruppe 1

1 $f(x) = e^{2x+1}$;

f ist umkehrbar, wenn die Funktion streng monoton ist.

$f'(x) = 2e^{2x+1} > 0$ für alle $x \in IR$ $\Rightarrow$ f ist in D streng monoton zunehmend und damit umkehrbar.

Wir vertauschen x und y: $x = e^{2y+1} \Rightarrow \ln x = (2y+1)\cdot\underbrace{\ln e}_{=1} \Rightarrow \ln x = 2y+1$

$$\Rightarrow \ln x - 1 = 2y \Rightarrow \underline{\underline{f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(\ln x - 1)}}$$

2

a) $g(x) = (x^2 - 9x)\cdot\sqrt{2-x} = x(x-9)\cdot\sqrt{2-x}$

Es muss gelten: $2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow \underline{\underline{D_g =]-\infty;2]}}$

Nullstellen

$\underline{\underline{x_1 = 0;\ x_2 = 2;}}\ x_3 = 9 \notin D_g$

b) $h(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(\underbrace{\frac{1}{\underbrace{x^2+1}_{\to\infty}}}_{\to 0^+}\right) = -\infty$$

Der Nenner der inneren Funktion ist minimal für $x = 0$. Der ganze Bruch ist dann maximal, nämlich 1. $\ln 1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{W_h =]-\infty;0]}}$

3 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}}$; $D_f = IR^+$

a) $F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}}$

$$F'(x) = -\frac{\sqrt{x}\cdot 0 - 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} = -\frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x^3}} = f(x)$$

$\Rightarrow$ F ist Stammfunktion von f.

b) Da $f(x) > 0$, liegt die Fläche oberhalb der x-Achse. Es gilt:

$$A = \int_1^b f(x)dx = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^b = \left[-\frac{2}{\sqrt{b}}\right] - \left[-\frac{2}{\sqrt{1}}\right] = -\frac{2}{\sqrt{b}} + 2$$

$$A = 1 \Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{b}} + 2 = 1 \Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{b}} = -1 \Rightarrow 2 = \sqrt{b} \Rightarrow \underline{\underline{b = 4}}$$

4 $f(x) = \frac{1}{8}x^3$; $f'(x) = \frac{3}{8}x^2$

a) Die Steigung der Gerade ergibt sich aus dem Steigungsdreieck (Differenzenquotient):

$$m_a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_{Q_a}}{x_P - x_{Q_a}} = \frac{2 - \frac{1}{8}a^3}{0 - a} = \frac{16 - a^3}{-8a} = \underline{\underline{\frac{a^3 - 16}{8a}}}$$

b) Die Steigung der Tangente an der Stelle $x = a$: $m = f'(a) = \frac{3}{8}a^2$

Wenn die Tangente durch P verläuft, muss gelten:

$$\frac{a^3 - 16}{8a} = \frac{3}{8}a^2 \Rightarrow a^3 - 16 = 8a \cdot \frac{3}{8}a^2 \Rightarrow a^3 - 16 = 3a^3 \Rightarrow 2a^3 = -16$$

$$\Rightarrow a^3 = -8 \Rightarrow \underline{\underline{a = -2}}$$

