Geometrie Aufgabengruppe 1

a) $E: x_2 + 5x_3 - 30 = 0$; $B_2(20/0/6)$; $B_3(20/10/4)$; $B_4(0/10/4)$

B_2 in E: $0 + 5 \cdot 6 - 30 = 0$ w.A. $\Rightarrow B_2 \in E$
B_3 in E: $10 + 5 \cdot 4 - 30 = 0$ w.A. $\Rightarrow B_3 \in E$
B_4 in E: $10 + 5 \cdot 4 - 30 = 0$ w.A. $\Rightarrow B_4 \in E$

b) Der gesuchte Winkel ist der Winkel zwischen den Normalenvektoren von E und der x_1x_2 – -Ebene.

$$\cos\varphi = = \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 5 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 5^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{5}{\sqrt{26}} \quad \Rightarrow \underline{\underline{\varphi \approx 11{,}3^0}}$$

c) Die Punkte liegen auf der Geraden h durch B_3 und B_4. Das Skalarprodukt aus den Verbindungsvektoren zu B_1 und T muss null ergeben:

$$\overrightarrow{B_3B_4} = \begin{pmatrix}0-20\\10-10\\4-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-20\\0\\0\end{pmatrix} = -20 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow h: \vec{X} = \begin{pmatrix}20\\10\\4\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Allgemeiner Geradenpunkt: $\vec{H} = \begin{pmatrix}20+\lambda\\10\\4\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{HB_1} = \begin{pmatrix}0-(20+\lambda)\\0-10\\6-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-20-\lambda\\-10\\2\end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{HT} = \begin{pmatrix}7-(20+\lambda)\\10-10\\0-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-13-\lambda\\0\\-4\end{pmatrix}$$

$$\underline{\overrightarrow{HB_1} \circ \overrightarrow{HT} = 0}: \begin{pmatrix}-20-\lambda\\-10\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-13-\lambda\\0\\-4\end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow (-20-\lambda)(-13-\lambda) - 0 - 8 = 0$$

$$\Rightarrow 260 + 20\lambda + 13\lambda + \lambda^2 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \lambda^2 + 33\lambda + 252 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{-33 \pm \sqrt{33^2 - 4 \cdot 1 \cdot 252}}{2} = \frac{-33 \pm 9}{2} \quad \Rightarrow \lambda_1 = -21; \ \lambda_2 = -12$$

$$\vec{H_1} = \begin{pmatrix}20-21\\10\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\10\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{H_1(-1/10/4)}}; \quad \vec{H_2} = \begin{pmatrix}20-12\\10\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\10\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{H_2(8/10/4)}}$$

Nur H_2 liegt auf der Strecke $[B_3B_4]$, H_1 liegt offensichtlich außerhalb.

d) $\overrightarrow{LB_2} = \begin{pmatrix} 20-10 \\ 0-0 \\ 6-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{LB_3} = \begin{pmatrix} 20-10 \\ 10-0 \\ 4-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \; = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow F: 3x_1 + x_2 + 5x_3 + c = 0$

L eingesetzt ergibt c: $3 \cdot 10 + 1 \cdot 0 + 5 \cdot 12 + c = 0 \quad \Rightarrow c = -90$

$\Rightarrow \underline{\underline{F: 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 90 = 0}}$

e) I $\quad 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 90 = 0$

II $\quad x_3 = 0$

II in I: $3x_1 + x_2 - 90 = 0$ (I‘)

Nun wählen wir z.B. : $x_1 = \lambda$

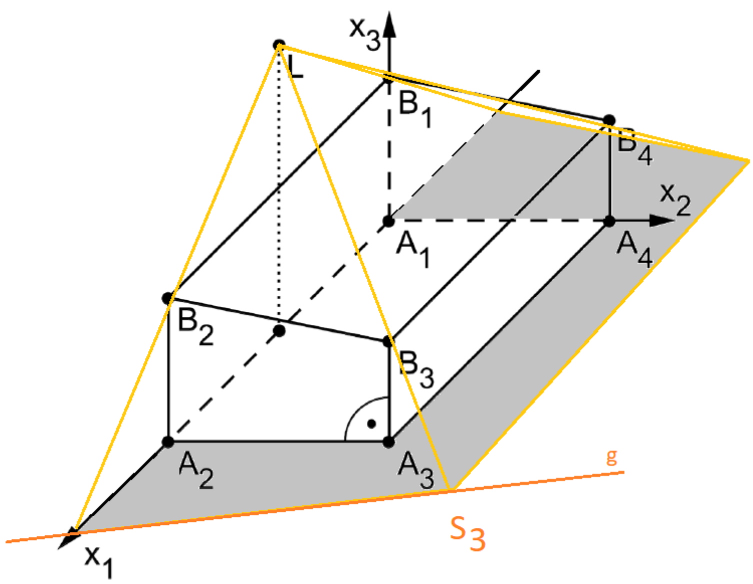
in I‘: $3\lambda + x_2 - 90 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = -3\lambda + 90$

Zusammengefasst:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 + 1\lambda \\ x_2 = 90 - 3\lambda \\ x_3 = 0 + 0\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 90 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

Hinweis: Natürlich ist auch ein anderer Aufpunkt möglich (vgl. Kontrollergebnis).

f) Im Dreidimensionalen ergibt sich folgendes Bild (nur zur besseren Vorstellung):



Der Schattenbereich ist also ein Trapez. Dessen einer Schenkel liegt auf der Geraden g, der andere auf einer symmetrischen Geraden. Die Grundseite liegt auf der x_1 ăAchse.

Fraglich ist noch die Lage der Parallelen durch den Punkt S_3. Dieser muss berechnet werden. Er liegt auf der Geraden LB_3, die x_3 ăKoordinate ist null:

$$\overrightarrow{LB_3} = \begin{pmatrix} 20-10 \\ 10-0 \\ 4-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow g_3 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Jetzt setzen wir die x_3 – Koordinate gleich null: $12 - 8\lambda = 0 \;\Rightarrow 8\lambda = 12$

$$\Rightarrow \lambda = 1{,}5$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{S_3} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + 1{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S_3(25/15/0)$$