Analysis Aufgabengruppe 2

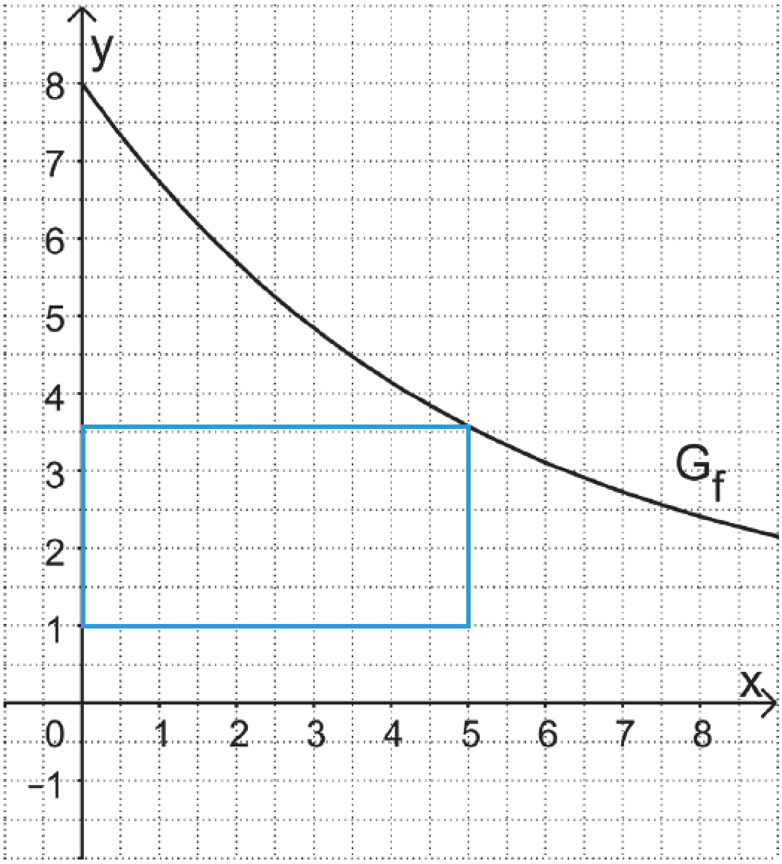
1 $f(x)=1+7e^{-0,2x}$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} 1+7\underbrace{e^{\overbrace{-0,2x}^{\to-\infty}}}_{\to 0}=1 \quad \Rightarrow y=1$ ist waagrechte Asymptote von G_f.

$f'(x)=7e^{-0,2x}\cdot(-0,2)=-1,4e^{-0,2x}<0$ für alle $x\in D$

$\Rightarrow$ f ist streng monoton abnehmend.

b)



$R(s)=s\cdot(1+7e^{-0,2s}-1)\ =7s\cdot e^{-0,2s}$

Maximum

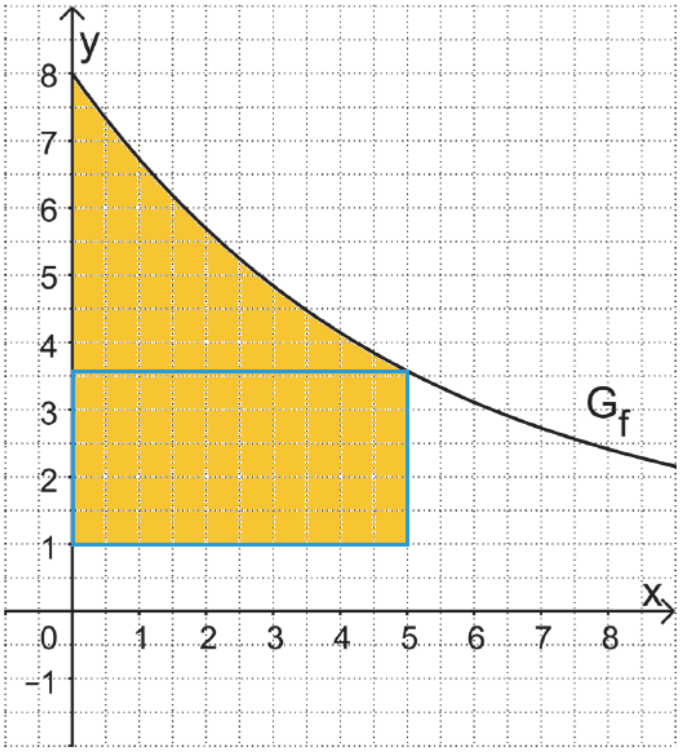
$R'(s)=7\cdot e^{-0,2s}+7s\cdot e^{-0,2s}\cdot(-0,2)\ =e^{-0,2s}(7-1,4s)$

$\underline{R'(s)=0}:\ \underbrace{e^{-0,2s}}_{\neq 0}(7-1,4s)=0\ \Rightarrow 7-1,4s=0\ \Rightarrow 1,4s=7\ \Rightarrow \underline{\underline{s=5}}$

$R'(4)=\underbrace{e^{-0,2\cdot 4}}_{>0}\underbrace{(7-1,4\cdot 4)}_{>0}>0;\quad R'(6)=\underbrace{e^{-0,2\cdot 6}}_{>0}\underbrace{(7-1,4\cdot 6)}_{<0}<0$

Bei $s=5$ liegt daher ein Maximum bei R(s) vor.

c)



$$A = \int_0^5 f(x)dx - 1 \cdot 5 = \left[x + \frac{7e^{-0{,}2x}}{-0{,}2}\right]_0^5 - 5 \ = \left[5 + \frac{7e^{-0{,}2 \cdot 5}}{-0{,}2}\right] - \left[0 + \frac{7e^{0}}{-0{,}2}\right] - 5$$

$$= 5 - 35e^{-1} + 35 - 5 \ = 35 - 35e^{-1} \approx \underline{\underline{22{,}12}}$$

$$A_{Rechteck} = 5 \cdot (f(5) - 1) \ = 5 \cdot \left(1 + 7e^{-0{,}2 \cdot 5} - 1\right) \ = 35e^{-1}$$

$$\text{Anteil} = \frac{35e^{-1}}{35 - 35e^{-1}} = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = 0{,}58197... \approx \underline{\underline{58{,}2\,\%}}$$

2 $A(x) = \dfrac{8}{1 + 7e^{-0{,}2x}}$

a) $A(0) = \dfrac{8}{1 + 7e^{0}} = 1$

$$\lim_{x \to \infty} A(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{8}{1 + 7\underbrace{e^{\overbrace{-0{,}2x}^{\to -\infty}}}_{\to 0}} = \underline{\underline{8}}$$

Zu Beobachtungsbeginn hat der Algenteppich eine Fläche von $1\,m^2$, auf lange Sicht nähert sich die Fläche dem Wert $8\,m^2$ an.

f wird im Verlauf immer kleiner und nähert sich dem Wert 1. Daher wird der Nenner immer kleiner und somit der ganze Bruch immer größer.
Der Flächeninhalt des Algenteppichs nimmt also ständig zu.

b) $\underline{A(x)=4}:\ \frac{8}{1+7e^{-0,2x}}=4 \quad \Rightarrow 8=4(1+7e^{-0,2x}) \quad \Rightarrow 1+7e^{-0,2x}=2$

$$\Rightarrow 7e^{-0,2x}=1 \quad \Rightarrow e^{-0,2x}=\frac{1}{7} \quad \Rightarrow -0,2x=\ln\frac{1}{7} \quad \Rightarrow x_0=-5\ln\frac{1}{7}\approx \underline{\underline{9,7}}$$

Nach knapp 10 Tagen beträgt der Flächeninhalt des Algenteppichs $4\ m^2$.

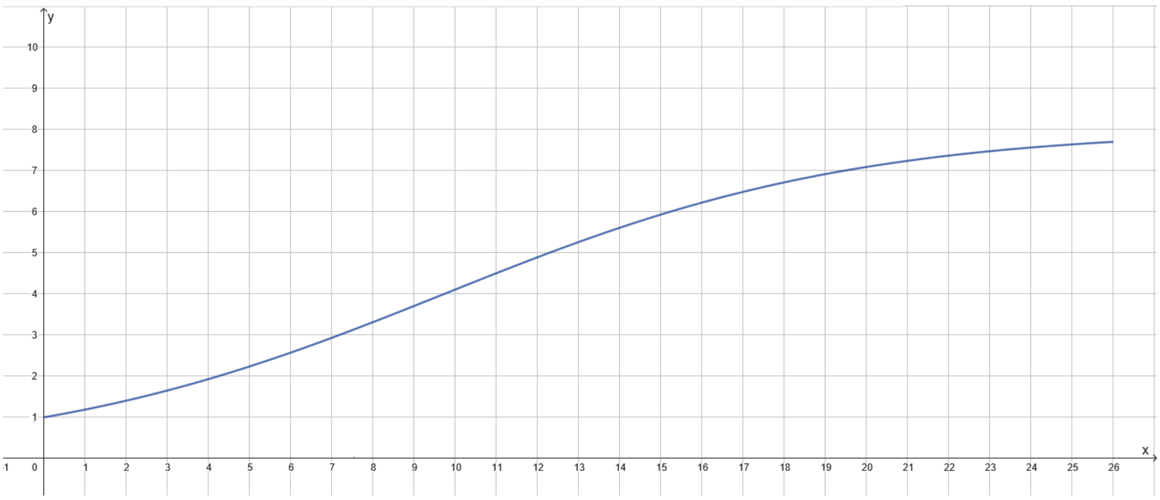
c) Momentane Änderungsrate zu Beobachtungsbeginn

$$A'(x)=\frac{(1+7e^{-0,2x})\cdot 0-8\cdot 7e^{-0,2x}\cdot(-0,2)}{(1+7e^{-0,2x})^2}=\frac{11,2e^{-0,2x}}{(1+7e^{-0,2x})^2}$$

$$A'(0)=\frac{11,2e^{0}}{(1+7e^{0})^2}=\frac{11,2}{64}=\underline{\underline{0,175}}$$

d) Das Maximum der momentanen Änderungsrate, also der Ableitung und somit der Steigung des Graphen von A bedeutet für diesen, dass er an dieser Stelle einen **Wendepunkt** hat.

e)



f) $A_k(x)=\frac{8}{1+7e^{kx}};\ k<-0,2$

$$A_k(0)=\frac{8}{1+7e^{0}}=1$$

Bei Beobachtungsbeginn ist der Algenteppich im Norden genau so groß wie der im Süden.

$$\lim_{x\to\infty}A_k(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{8}{1+7\underbrace{e^{\overset{\to-\infty}{\overbrace{kx}}}}_{\to 0}}=\underline{\underline{8}}$$

Nach langer Zeit nähert sich auch die Fläche des Teppichs im Norden $8\ m^2$ an.

$$A_k'(x) = \frac{(1+7e^{kx})\cdot 0 - 8\cdot 7e^{kx}\cdot k}{(1+7e^{kx})^2} = \frac{-56k\cdot e^{kx}}{(1+7e^{kx})^2}$$

$$A_k'(0) = \frac{-56k\cdot e^{0}}{(1+7e^{0})^2} = \frac{-56k}{64} = -0{,}875k$$

Setzt man für k einen Wert $k < -0{,}2$ ein, so sieht man, dass die momentane Änderungsrate größer wird. Die momentane Änderungsrate zu Beobachtungsbeginn ist im Norden also größer. Der Algenteppich wächst am Anfang schneller.