Analysis Aufgabengruppe 1

1 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

a) $f(-x)=\dfrac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1}=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=f(x)$

$\Rightarrow G_f$ ist symmetrisch zur y-Achse.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1-\overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}\right)}=\frac{1}{1}=\underline{\underline{1}}$$

$\underline{f(x)=0{,}96}$: $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=0{,}96 \;\Rightarrow x^2-1=0{,}96(x^2+1) \;\Rightarrow x^2-1=0{,}96x^2+0{,}96$

$\Rightarrow 0{,}04x^2=1{,}96 \;\Rightarrow x^2=49 \;\Rightarrow \underline{\underline{x_1=-7}};\ \underline{\underline{x_2=7}}$

b) $f'(x)=\dfrac{(x^2+1)\cdot 2x-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x(x^2+1-x^2+1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x\cdot 2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

Der Nenner ist wegen des Quadrats immer positiv, daher hängt das Vorzeichen der Ableitung nur vom Vorzeichen des Zählers ab. Es gilt demnach:

für $x>0$: $f'(x)>0 \Rightarrow G_f$ ist streng monoton steigend
für $x<0$: $f'(x)<0 \Rightarrow G_f$ ist streng monoton fallend

c) Tangente in $(3/(f(3))$

$f(3)=\dfrac{3^2-1}{3^2+1}=\dfrac{8}{10}=0{,}8$

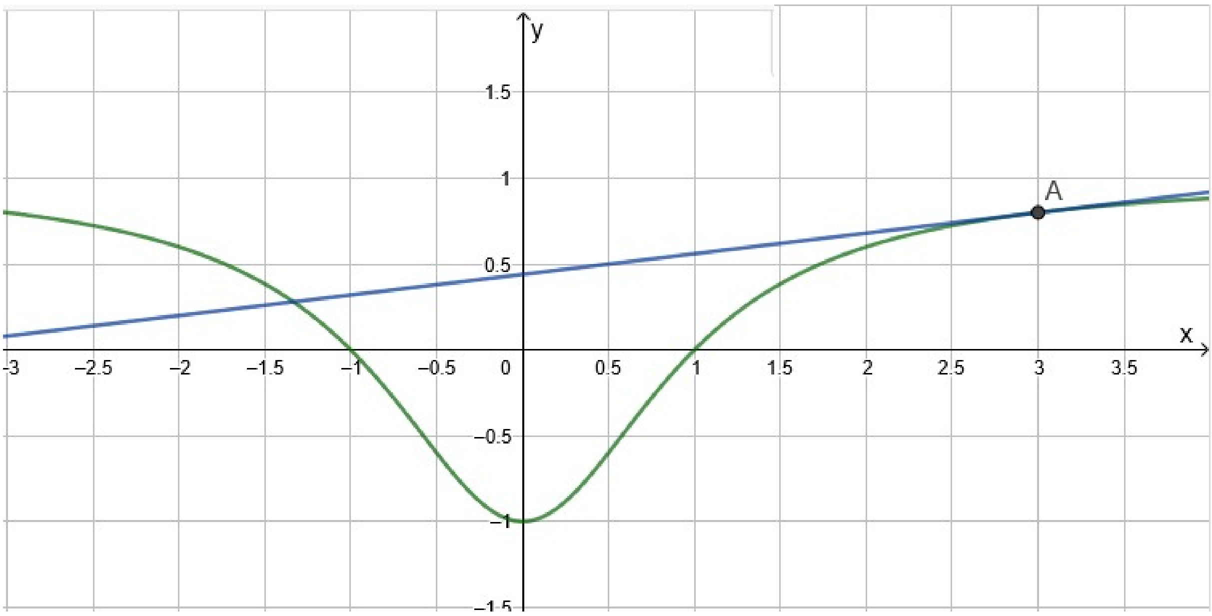
$f'(3)=\dfrac{4\cdot 3}{(3^2+1)^2}=\dfrac{12}{100}=0{,}12=m$

Einsetzen des Punktes und der Steigung in die Geradengleichung:

$0{,}8=0{,}12\cdot 3+t \;\Rightarrow t=0{,}44 \;\Rightarrow \underline{\underline{t(x)=0{,}12x+0{,}44}}$

Winkel zwischen Tangente und x-Achse

$\tan\varphi=0{,}12 \;\Rightarrow \underline{\underline{\varphi\approx 6{,}84^\circ}}$



2 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

a) Jede Integralfunktion hat eine Nullstelle, wenn man die Untergrenze in die Obergrenze einsetzt, also hier bei $x = 0$.

Eine weitere Nullstelle ergibt sich, wenn sich Flächenstücke ober- und unterhalb der x-Achse beim Durchintegrieren gegenseitig aufheben. Hier gibt es für $1 \le x \le 3$ ein Flächenstück oberhalb der x-Achse, das inhaltsgleich mit dem Flächenstück zwischen Graph von f und x-Achse für $0 \le x \le 1$ ist.

Bei $x = -1$ hat die Ableitung (f) von F eine Nullstelle mit VZW von + nach -. Der Graph von F hat dort demnach einen **HOP**.

b) Die Nullstelle der Geraden ist bei $x = 1$, der Schnittpunkt mit der y-Achse bei $y = 1$. Da die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, gilt: $F(1) \approx -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \underline{\underline{-0{,}5}}$

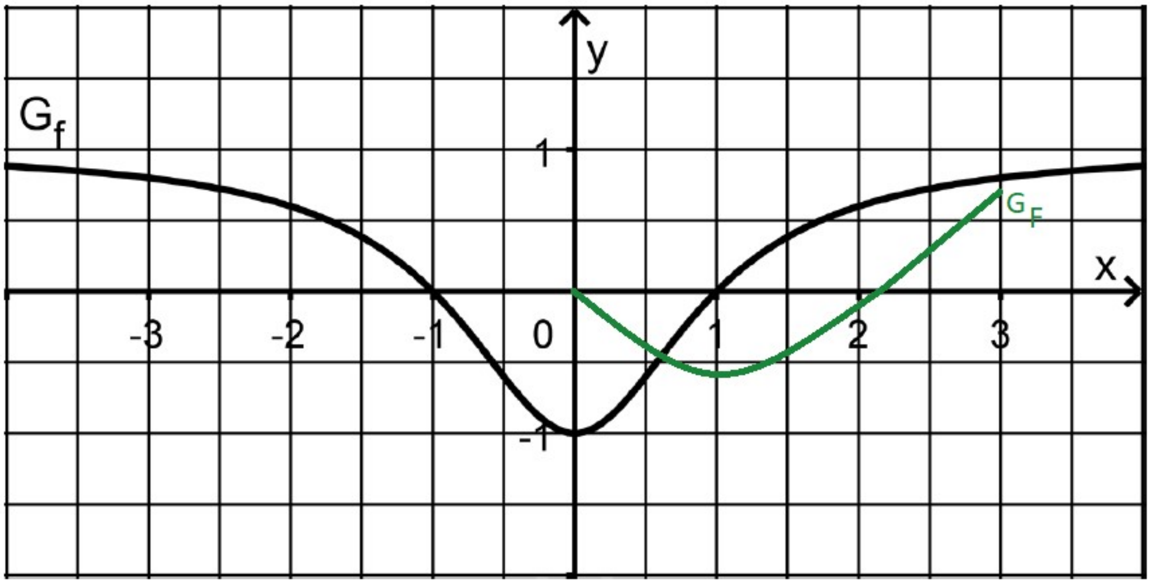
c) $g(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Wegen $a = -1$ wird der Graph der Funktion $y = \cos x$ zunächst an der x-Achse gespiegelt. Für die Periode ergibt sich: $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi \cdot 2}{\pi} = 4$

$$F(1) \approx \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 -\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \left[-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\frac{\pi}{2}}\right]_0^1 = \left[-\frac{\overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=1}}{\frac{\pi}{2}}\right] - \left[-\frac{\overbrace{\sin(0)}^{=0}}{\frac{\pi}{2}}\right] = \underline{\underline{-\frac{2}{\pi}}}$$

d) Arithmetisches Mittel (Mittelwert)

$$\varnothing = \frac{-\frac{2}{\pi} - 0{,}5}{2} \approx \underline{\underline{-0{,}57}}$$



3

a) $f(2) = \frac{2^2 - 1}{2^2 + 1} = \frac{3}{5} = 0{,}6$; $A_{\Delta P_2 Q_2 R} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1 - 0{,}6) \;= \underline{\underline{0{,}8}}$

$$f(k) = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}$$

$$A(k) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(1 - \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}\right) \;= k - \frac{k(k^2 - 1)}{k^2 + 1} \;= \frac{k(k^2 + 1) - k(k^2 - 1)}{k^2 + 1}$$

$$= \frac{k^3 + k - k^3 + k}{k^2 + 1} \;= \underline{\underline{\frac{2k}{k^2 + 1}}}$$

b) Maximum

$$A'(k) = \frac{(k^2 + 1) \cdot 2 - 2k \cdot 2k}{(k^2 + 1)} \;= \frac{2k^2 + 2 - 4k^2}{(k^2 + 1)} \;= \frac{2 - 2k^2}{(k^2 + 1)}$$

$\underline{A'(k) = 0}$: $2 - 2k^2 = 0 \;\Rightarrow 2k^2 = 2 \;\Rightarrow k^2 = 1 \;\Rightarrow k = 1 \;(k > 0!)$

$$A'(0{,}5) = \frac{2 - 2 \cdot 0{,}5^2}{(0{,}5^2 + 1)} = \frac{1{,}5}{1{,}25} > 0;\; A'(1{,}5) = \frac{2 - 2 \cdot 1{,}5^2}{(1{,}5^2 + 1)} = \frac{-2{,}5}{3{,}25} < 0$$

$\Rightarrow$ für $k = 1$ ist $A(k)$ maximal.

$$A_{max} = A(1) = \frac{2}{1^2 + 1} = \underline{\underline{1}}$$