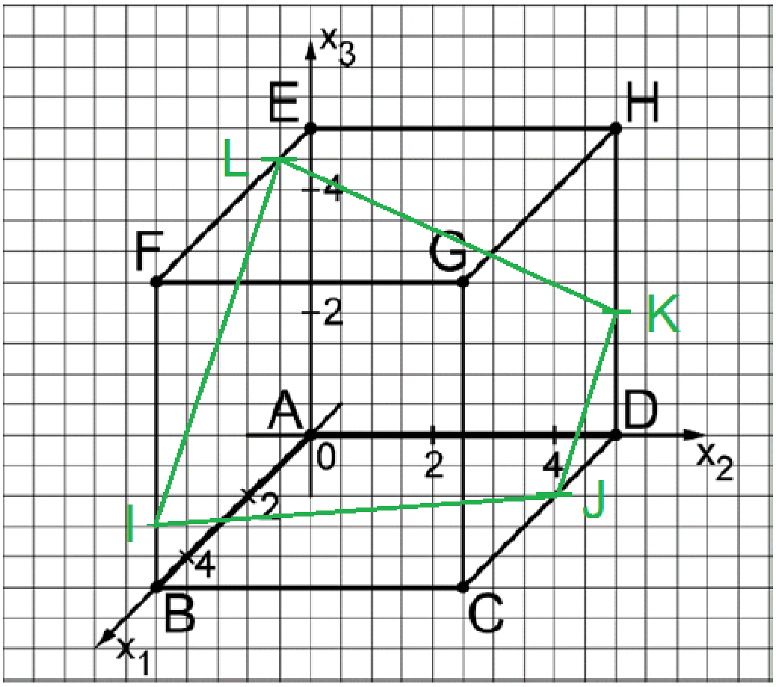
Geometrie Aufgabengruppe 2

a)



Es gilt: $\overrightarrow{IL} = \begin{pmatrix} 1-5 \\ 0-0 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{JK} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 5-5 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{IL}$

Da beide Vektoren Vielfache voneinander sind, ist das Viereck IJKL ein Trapez.

$$\left|\overrightarrow{IJ}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2-5 \\ 5-0 \\ 0-1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + (-1)^2} = \sqrt{35}$$

$$\left|\overrightarrow{LK}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0-1 \\ 5-0 \\ 2-5 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}$$

In dem Trapez sind zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang.

b) $T:\vec{X}=\vec{I}+\alpha\cdot\vec{IJ}+\beta\cdot\vec{IL}=\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix}-3\\5\\-1\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-3\\5\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\16\\20\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}5\\4\\5\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{n}=\begin{pmatrix}5\\4\\5\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow T:5x_1+4x_2+5x_3+c=0$

I eingesetzt ergibt c: $5\cdot5+4\cdot0+5\cdot1+c=0\quad\Rightarrow c=-30$

$\Rightarrow \underline{\underline{T:5x_1+4x_2+5x_3-30=0}}$

c) $g_a:\vec{X}=\begin{pmatrix}2{,}5\\0\\3{,}5\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\-10a\\\frac{2}{a}\end{pmatrix}$

Für den Mittelpunkt M der Fläche CDHG gilt:

$$\Rightarrow\vec{M}=\vec{C}+\frac{1}{2}\cdot\vec{CH}=\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0-5\\5-5\\5-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-5\\0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2{,}5\\5\\2{,}5\end{pmatrix}$$

Jetzt setzen wir M in die Gerade ein:

$$\begin{pmatrix}2{,}5\\5\\2{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2{,}5\\0\\3{,}5\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\-10a\\\frac{2}{a}\end{pmatrix}$$

I $\quad 2{,}5=2{,}5$

II $\quad 5=-10a\cdot\lambda$

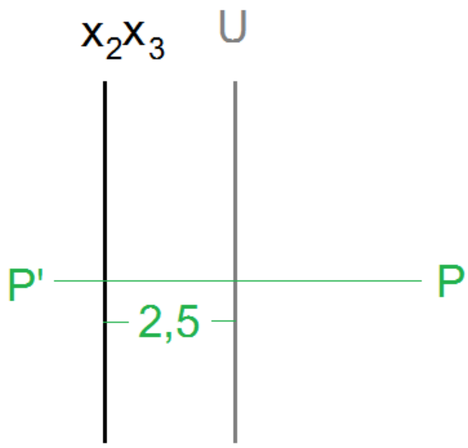
III $\quad 2{,}5=3{,}5+\frac{2\lambda}{a}$

III‘ $\quad -1=\frac{2\lambda}{a}\quad a=-2\lambda$

in II $\quad 5=-10(-2\lambda)\cdot\lambda\quad\Rightarrow 5=20\lambda^2\quad\Rightarrow\lambda^2=\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\lambda=\pm\frac{1}{2}$

in III‘ $\quad \underline{\underline{a=1}}$ (a muss positiv sein, daher entfällt die negative Lösung.)

d)



Die Ebene U ist parallel zur x_2x_3 – Ebene. Wird ein Punkt P an U gespiegelt, so bleiben die x_2 – und die x_3 – Koordinate daher gleich. Der Bildpunkt ergibt sich auch, wenn man P zunächst an der x_2x_3 – Ebene spiegelt und dann um 2,5 nach rechts verschiebt.

Für die x_1 – Koordinate gilt daher: $p_1' = -p_1 + 2{,}5 \quad \Rightarrow \underline{\underline{P'(-p_1 + 2{,}5 / p_2 / p_3)}}$

e) Zunächst muss der Richtungsvektor der Gerade senkrecht stehen auf dem Normalenvektor der Ebene, das Skalarprodukt muss demnach null ergeben:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow 0 - 40a + \frac{10}{a} = 0 \quad \Rightarrow -40a^2 + 10 = 0 \quad \Rightarrow 40a^2 = 10$$

$\Rightarrow a^2 = 0{,}25 \quad \Rightarrow \underline{\underline{a = 0{,}5}}$ (Die negative Lösung entfällt laut Angabe)

Damit die Gerade $g_{0,5}$ in der Ebene liegt und nicht parallel verläuft, muss der Aufpunkt der Gerade in der Ebene T liegen:

$5 \cdot 2{,}5 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3{,}5 - 30 = 0 \quad \Rightarrow 30 - 30 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ (w.A.)

Der Aufpunkt liegt also in der Ebene. Daher liegt $g_{0,5}$ in der Ebene.

Die Gerade $g_{0,5}$ ist die Schnittgerade der Ebene T mit der Spiegelebene U. Sie ist somit Fixgerade und geht bei Spiegelung von T an U in sich selbst über. Daher liegt sie auch in der Bildebene T' und ist somit auch Schnittgerade von T und T'.

f) Zunächst suchen wir den Punkt H auf der Gerade h durch F und G, der von der Ebene T den Abstand 2 hat. Dazu setzen wir die Gerade in die HNF der Ebene ein:

$$h: X = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2 = \frac{|5 \cdot 5 + 4 \cdot \nu + 5 \cdot 5 - 30|}{\sqrt{5^2 + 4^2 + 5^2}} \Rightarrow 2 = \frac{|25 + 4\nu + 25 - 30|}{\sqrt{66}} \Rightarrow 2\sqrt{66} = |20 + 4\nu|$$

1. Fall: $2\sqrt{66} = 20 + 4\nu \Rightarrow 4\nu = 2\sqrt{66} - 20 \Rightarrow \nu = \frac{1}{2}\sqrt{66} - 5 \approx -0{,}94$

2. Fall: $-2\sqrt{66} = 20 + 4\nu \Rightarrow 4\nu = -2\sqrt{66} - 20 \Rightarrow \nu = -\frac{1}{2}\sqrt{66} - 5 \approx -9{,}06$

Damit die Spitze der Pyramide auf der **Kante** [FG] liegt, müsste gelten: $0 < \nu < 1$
Beide gefundenen Werte sind nicht in diesem Bereich. Daher gibt es zwar zwei Pyramiden mit Spitze auf der **Gerade** FG, deren Höhe 2 beträgt, nicht jedoch auf der **Kante** [FG].

