

Analysis Aufgabengruppe 2

1 $f(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}$

- a) Der Bruch ist null, wenn der Zähler null ist. Das ist vorliegend nur bei $x = 0$ der Fall.

Senkrechte Asymptote: $x = -1$

Da der Nenner überwiegt, gilt: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{(x+1)^2} = \frac{\infty^1}{\infty^2} = 0$.

Daher ist die Gerade mit der Gleichung $y = 0$ (x -Achse) waagrechte Asymptote.

b) $f'(x) = \frac{(x+1)^2 \cdot 4 - 4x \cdot 2 \cdot (x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x^2 + 2x + 1) \cdot 4 - 8x \cdot (x+1)}{(x+1)^4}$
 $= \frac{4x^2 + 8x + 4 - 8x^2 - 8x}{(x+1)^4} = \frac{-4x^2 + 4}{(x+1)^4}$

$f'(x) = 0: -4x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -1 (\notin D_f)$

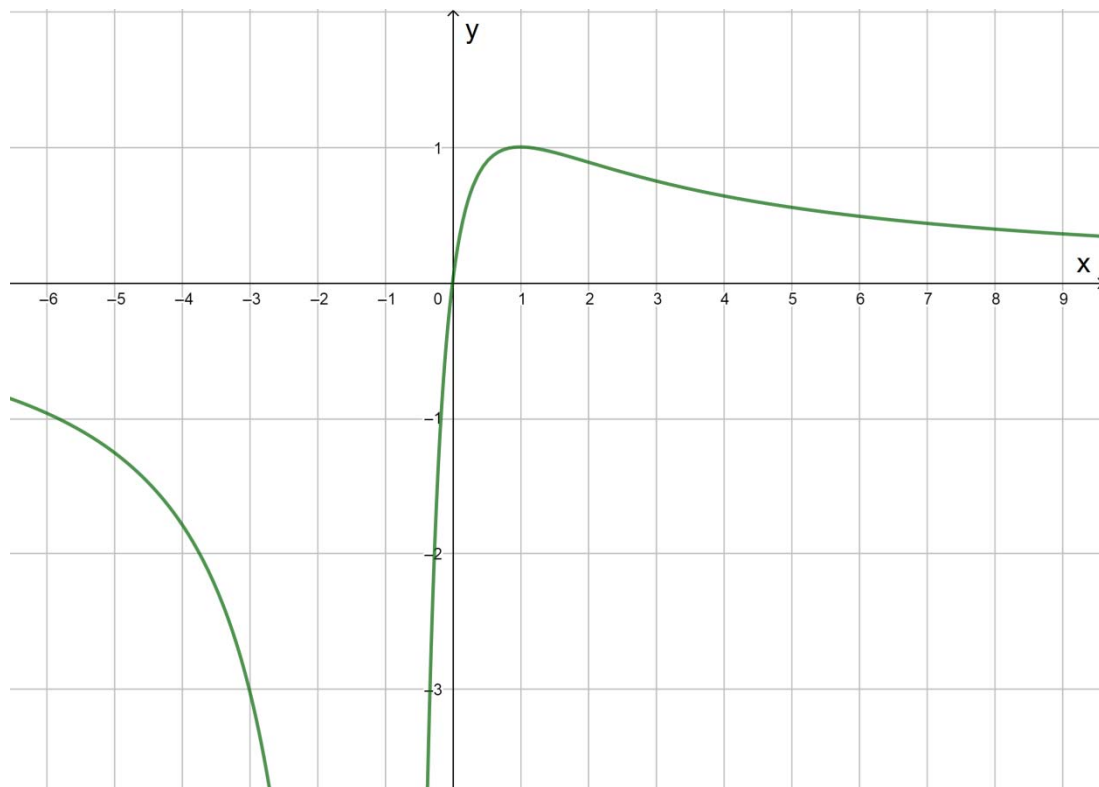
$f'(0) = \frac{-4 \cdot 0^2 + 4}{(0+1)^4} > 0 \Rightarrow G_f$ ist streng monoton steigend in $]-1; 1]$.

$f'(2) = \frac{-4 \cdot 2^2 + 4}{(2+1)^4} < 0 \Rightarrow G_f$ ist streng monoton fallend in $]1; \infty[$.

$f(1) = \frac{4 \cdot 1}{(1+1)^2} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{HOP(1/1)}}$

- c) $f(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}$: Für $x < 0$ ist der Zähler negativ, der Nenner positiv und damit der ganze Bruch negativ. Der Graph von f verläuft daher nur im III. Quadranten.

| | | | | |
|--------|-------|-------|-------|----|
| x | -6 | -5 | -4 | -3 |
| $f(x)$ | -0,96 | -1,25 | -1,78 | -3 |



d) $F(x) = 4 \cdot \ln(x+1) + \frac{4}{x+1}$

$$F'(x) = \frac{4}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{4(x+1) - 4}{(x+1)^2} = \frac{4x}{(x+1)^2} = f(x)$$

⇒ F ist Stammfunktion von f.

e) $f(0,5) = \frac{4 \cdot 0,5}{(0,5+1)^2} = \frac{2}{2,25} = \frac{8}{9}$

Nach 30 Minuten beträgt die Wirkstoffkonzentration $\frac{8}{9}$ mg/l.

Die maximale Konzentration beträgt 1 mg/l (vgl. b)

- f) Die 2. Ableitung muss an der Stelle $x = 2$ eine einfache Nullstelle haben.
 Nach 2 Stunden ist die Abnahme der Wirkstoffkonzentration am kleinsten.

$$\begin{aligned} \text{g) } A(b) &= \int_0^b f(x) dx = \left[4 \cdot \ln(x+1) + \frac{4}{x+1} \right]_0^b = \left[4 \cdot \ln(b+1) + \frac{4}{b+1} \right] - \left[4 \cdot \ln(0+1) + \frac{4}{0+1} \right] \\ &= \left[4 \cdot \ln(b+1) + \frac{4}{b+1} \right] - [4 \cdot \ln 1 + 4] = 4 \cdot \ln(b+1) + \frac{4}{b+1} - 4 \end{aligned}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} A(b) = \lim_{b \rightarrow \infty} \underbrace{4 \cdot \ln(b+1)}_{\rightarrow \infty} + \underbrace{\frac{4}{b+1}}_{\rightarrow 0} - 4 = \infty$$

Der mittlere Teil des Terms von $A(b)$ geht zwar gegen null, der erste Teil aber gegen unendlich. Daher geht der ganze Term gegen unendlich. Dem Flächeninhalt kann also kein endlicher Wert zugeordnet werden. Die Funktion f stellt also für große Zeitwerte **keine** realistische Modellierung der Wirkstoffkonzentration dar.

$$\begin{aligned} \text{h) } \underline{f(x) = 0,75}: \quad \frac{4x}{(x+1)^2} = 0,75 &\Rightarrow 4x = 0,75 \cdot (x+1)^2 \Rightarrow 16x = 3 \cdot (x^2 + 2x + 1) \\ &\Rightarrow 16x = 3x^2 + 6x + 3 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \\ &\Rightarrow x_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} \Rightarrow x_1 = 3; x_2 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Der zweite Wert ist im steigenden Teil des Graphen, hier wird also der Wert 0,75 mg/l überschritten. x_1 ist im fallenden Teil des Graphen von f . Daher muss die zweite Tablette spätestens nach 3 Stunden eingenommen werden.

- i) Die Wirkstoffkonzentration durch die zweite Tablette wird durch die um 2,5 nach rechts verschobene Funktion, also $f(x - 2,5)$ beschrieben. Da die Konzentration der ersten Tablette hinzukommt, wird die Wirkstoffkonzentration für $x \in [2,5; 9]$ mit **Term B** beschrieben werden.

$$\text{j) } k(x) = \frac{3e^{2x}}{e^{2x} + 1} - 1,5$$

$$k'(x) = \frac{(e^{2x} + 1)3e^{2x} \cdot 2 - 3e^{2x} \cdot e^{2x} \cdot 2}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{6e^{2x}(e^{2x} + 1 - e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{6e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$$

Der Zähler ist wegen der e -Funktion, der Nenner wegen des Quadrats immer positiv. Daher ist der Graph von k streng monoton steigend.

$$\text{k) } \lim_{x \rightarrow \infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3e^{2x}}{e^{2x} + 1} - 1,5 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3e^{2x}}{e^{2x} \left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)} - 1,5 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{1 + \underbrace{\frac{1}{e^{2x}}}_{\substack{\rightarrow \infty \\ \rightarrow 0}}} - 1,5 = 3 - 1,5 = \underline{\underline{1,5}}$$

$$k(1) = \frac{3e^2}{e^2 + 1} - 1,5 \approx 1,14$$

Nach einer Stunde beträgt die Wirkstoffkonzentration 1,14 mg/l. Da k streng monoton zunehmend ist, ist diese nach einer Stunde dauerhaft größer als 0,75 mg/l. Außerdem soll die Konzentration mindestens 25 % unter der Grenze von 2 mg/l, also höchstens bei 1,5 mg/l liegen. Durch den oben berechneten Grenzwert ergibt sich, dass nie 1,5 mg/l erreicht oder überschritten werden. Auch diese Bedingung ist also erfüllt.