Analysis Aufgabengruppe 1

1 $f(x) = 2 - \ln(x-1)$

a) Es muss gelten: $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow \underline{\underline{D_f =]1;\infty[}}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 2 - \underbrace{\ln(\underbrace{x-1}_{\to\infty})}_{\to\infty} = \underline{\underline{-\infty}}$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} 2 - \underbrace{\ln(\underbrace{x-1}_{\to 0+0})}_{\to -\infty} = \underline{\underline{\infty}}$$

b) $\underline{f(x) = 0}$: $2 - \ln(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \ln(x-1) = 2 \quad \Rightarrow x - 1 = e^2 \quad \Rightarrow \underline{\underline{x = e^2 + 1}}$ $(\approx 8{,}4)$

c) Der Graph von f geht aus dem Graphen von $y = \ln x$ wie folgt hervor:

(1) Spiegeln an der x-Achse.

(2) Verschieben um 1 nach rechts.

(3) Verschieben um 2 nach oben.

Da der Graph von $y = \ln x$ in D streng monoton steigend ist, ist der Graph von f wegen der Spiegelung an der x-Achse streng monoton fallend in D_f.

d) $F(x) = 3x - (x-1)\cdot\ln(x-1)$

$$F'(x) = 3 - \left[1\cdot\ln(x-1) + (x-1)\cdot\frac{1}{x-1}\right] = 3 - \ln(x-1) - 1 = 2 - \ln(x-1) = f(x)$$

$\Rightarrow$ F ist Stammfunktion von f.

Für die Menge aller Stammfunktionen gilt: $F_c(x) = 3x - (x-1)\cdot\ln(x-1) + C$

Der Punkt eingesetzt ergibt: $0 = 3\cdot 2 - (2-1)\cdot\ln(2-1) + C \Rightarrow 0 = 6 - 1\cdot\underbrace{\ln(1)}_{=0} + C$

$$\Rightarrow C = -6$$

$\Rightarrow \underline{\underline{F_{-6}(x) = 3x - (x-1)\cdot\ln(x-1) - 6}}$

2

a) An der Stelle f(2) geht das Plateau in die Abfahrt über. An dieser Stelle hat das Hinderniselement einen Knick.

Der Graph von q ist der an der y-Achse gespiegelte Graph von f:

$\underline{\underline{q(x) = 2 - \ln(-x-1)}}$

b) $f(2) = 2 - \ln(2-1) = 2$; $f(8) = 2 - \ln(8-1) = 2 - \ln 7$; $f'(x) = -\frac{1}{x-1}$

mittlere Änderungsrate: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-(2-\ln 7)}{2-8} = \frac{\ln 7}{-6}$

lokale Änderungsrate $= \frac{\ln 7}{-6}$: $-\frac{1}{x-1} = \frac{\ln 7}{-6} \Rightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{\ln 7}{6} \Rightarrow 6 = (x-1)\cdot \ln 7$

$$\Rightarrow x - 1 = \frac{6}{\ln 7} \Rightarrow \underline{\underline{x_m = 1 + \frac{6}{\ln 7}}} \; (\approx 4{,}1)$$

c) Zunächst zeichnen wir eine Gerade durch die Punkte (2/2) und $(8/2-\ln 7)$.
Diese Gerade wird so parallel verschoben, dass sie den Graphen von f berührt.
Die Stelle x_m ist die Abszisse des Berührpunkts.

d) $\tan\alpha = f'(2) \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{1}{2-1} \Rightarrow \tan\alpha = -1 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 135^0}}$

e) $\int_2^6 f(x)dx = [3x - (x-1)\cdot \ln(x-1)]_2^6 = [3\cdot 6 - (6-1)\cdot \ln(6-1)] - [3\cdot 2 - (2-1)\cdot \ln(2-1)]$

$$= [18 - 5\cdot \ln 5] - [6 - \ln 1] = 12 - 5\cdot \ln 5$$

Als Werbefläche stehen insgesamt $2\cdot(12 - 5\cdot \ln 5) \approx 7{,}91\text{m}^2$ zur Verfügung.

3 $g_k(x) = kx^3 + 3\cdot(k+1)x^2 + 9x$

a) (1) $k > 0$: $\lim\limits_{x\to\infty} g_k(x) = \underline{\underline{\infty}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g_k(x) = \underline{\underline{-\infty}}$

(2) $k < 0$: $\lim\limits_{x\to\infty} g_k(x) = \underline{\underline{-\infty}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g_k(x) = \underline{\underline{\infty}}$

b) $g_k'(x) = 3kx^2 + 6\cdot(k+1)x + 9$; $g_k''(x) = 6kx + 6\cdot(k+1)$

$\underline{g_k''(x) = 0}$: $6kx + 6\cdot(k+1) = 0 \Rightarrow kx + k + 1 = 0 \Rightarrow kx = -k - 1 \Rightarrow x = \frac{-k-1}{k}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x'' = -1 - \frac{1}{k}}}$$

Da es sich um einfache Nullstellen handelt, liegt jeweils an der Stelle ein WEP vor.

c) W_k liegt auf der y-Achse: $-1 - \frac{1}{k} = 0 \Rightarrow \frac{1}{k} = -1 \Rightarrow \underline{\underline{k = -1}}$

$g_{-1}(0) = -1\cdot 0^3 + 3\cdot(-1+1)\cdot 0^2 + 9\cdot 0 = 0$; W_k liegt in diesem Fall also im Ursprung.

Steigung der Wendetangente: $g_{-1}'(0) = 3\cdot(-1)\cdot 0^2 + 6\cdot(-1+1)\cdot 0 + 9 = \underline{\underline{9}}$

d)