Analysis Aufgabengruppe 1

1 $f(x)=2\left((\ln x)^2-1\right);\ D_f=\mathrm{IR}^+$

a) $\underline{f(x)=0}:\ 2\left((\ln x)^2-1\right)=0 \Rightarrow (\ln x)^2-1=0 \Rightarrow (\ln x)^2=1 \Rightarrow \ln x=\pm 1$

$\Rightarrow x_1=e^1=\underline{\underline{e}};\ x_2=\underline{\underline{e^{-1}}}$

$$f'(x)=2\left(2\cdot(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right)=\frac{4\ln x}{x};\quad f''(x)=\frac{x\cdot\frac{4}{x}-4(\ln x)\cdot 1}{x^2}=\frac{4-4\ln x}{x^2}$$

$$\underline{f'(x)=0}:\ \frac{4\ln x}{x}=0 \Rightarrow 4\ln x=0 \Rightarrow \ln x=0 \Rightarrow x'=1$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(1)=\frac{4-4\ln 1}{1^2}=4>0 \\ f(1)=2\left((\ln 1)^2-1\right)=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{TIP(1/-2)}}$$

Hinweis: Die Art des Extremums ergibt sich auch aus dem Graphen. Die Punkte für die 2. Ableitung sollten daher bei Teilaufgabe b gutgeschrieben werden, wenn diese bereits in a bestimmt wurde.

b) **Wendepunkt**

$$\underline{f''(x)=0}:\ \frac{4-4\ln x}{x^2}=0 \Rightarrow 4-4\ln x=0 \quad \Rightarrow 4\ln x=4 \Rightarrow \ln x=1 \Rightarrow x''=e$$

Da es sich um eine einfache Nullstelle der 2. Ableitung handelt, liegt hier ein Wendepunkt vor. Es handelt sich dabei um die rechte Nullstelle von f (vgl. a).
$\Rightarrow \underline{\underline{W(e/0)}}$

Wendetangente

Die Steigung ist die Steigung des Graphen von f bei $x''=e$.

$$m=f'(e)=\frac{4\ln e}{e}=\frac{4}{e}$$

m und W in die allgemeine Geradengleichung eingesetzt ergibt:

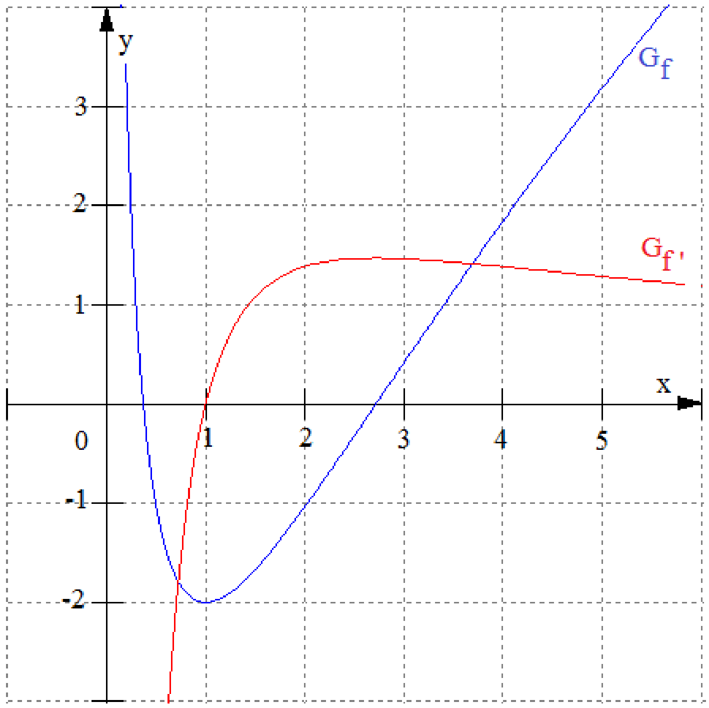
$$0=\frac{4}{e}\cdot e+t \Rightarrow t=-4$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y=\frac{4}{e}\cdot x-4}}$$

c) $$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{4\ln x}{x}=\text{"}\frac{-\infty}{0^+}\text{"}=\underline{\underline{-\infty}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4\ln x}{x}=\text{"}\frac{\infty^1}{\infty^2}\text{"}=\underline{\underline{0}}$$

$f'(0,5) = \frac{4\ln 0,5}{0,5} \approx \underline{\underline{-5,5}};\; f'(10) = \frac{4\ln 10}{10} \approx \underline{\underline{0,9}};$



d) Jede Integralfunktion hat eine Nullstelle, wenn Unter- und Obergrenze übereinstimmen, hier also für $x = e^{-1}$. Weitere Nullstellen kann es geben, wenn im Integrationsbereich gleich große Flächenstücke oberhalb und unterhalb der x-Achse vorliegen und sich diese beim „Durchintegrieren“gegenseitig aufheben. Für $x > e$ gibt es eine Fläche oberhalb der x-Achse, die genauso groß ist wie die Fläche zwischen $x = e^{-1}$ und $x = e$.
Also gibt es insgesamt **zwei Nullstellen** der Integralfunktion für $c \in \left]0;6\right]$.

e) $h(x) = 1,5x - 4,5 + \frac{1}{x}$

Die **schräge** Asymptote lässt sich direkt ablesen, da die Asymptotenform vorliegt:
$\underline{\underline{y = 1,5x - 4,5}}$

Die **senkrechte** Asymptote ergibt sich bei der Definitionslücke: $\underline{\underline{x = 0}}$

f) $$\int_1^2 h(x)dx = \int_1^2 1,5x - 4,5 + \frac{1}{x}dx = \left[\frac{3}{4}x^2 - 4,5x + \ln x\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{3}{4}\cdot 4 - 9 + \ln 2\right] - \left[\frac{3}{4} - 4,5 + \ln 1\right] = \ln 2 - 6 + 3,75 = \ln 2 - 2,25 \approx -1,557$$

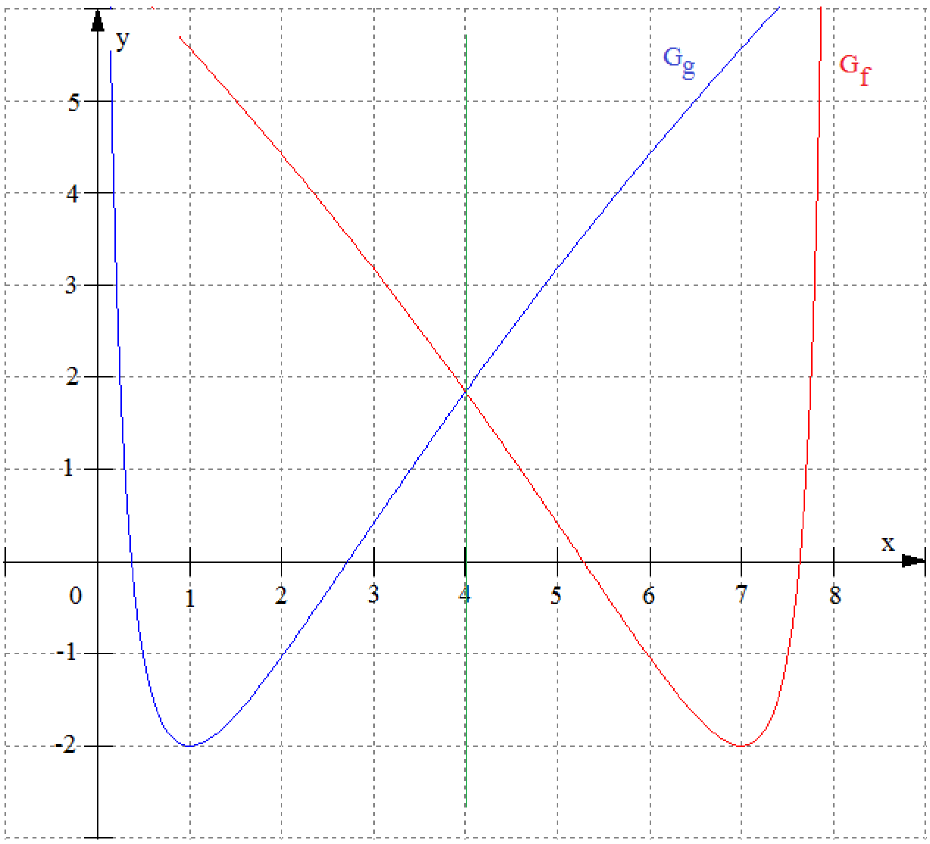
$\Rightarrow A_h \approx 1,557$

Die Abweichung der Fläche A_h von der Fläche A_f beträgt

$$\frac{1,623-1,557}{1,623}\approx 0,041=\underline{\underline{4,1\%}}.$$

2

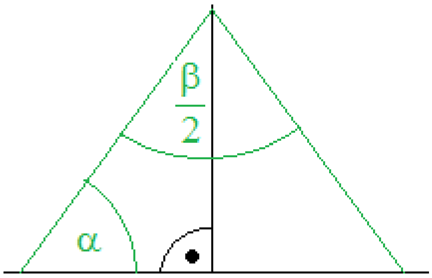
a)



b) Das Problem löst sich am einfachsten, indem man zunächst nur einen Punkt spiegelt, z.B. den TIP $(1/-2)$. Bei direkter Spiegelung an der Geraden $x=4$ geht dieser in den Punkt $(7/-2)$ über. Daher Verschiebung um 6 nach rechts.
Spiegelt man zunächst an der y-Achse, geht der Punkt zunächst in $(-1/-2)$ über und muss danach entsprechend um 8 nach rechts verschoben werden. Daraus ergibt sich:

$$g(x)=2\cdot\left((\ln(-(x-8)))^2-1\right)=2\cdot\left((\ln(-x+8))^2-1\right)\ \Rightarrow \underline{\underline{a=-1}};\ \underline{\underline{b=8}}$$

c) Zunächst berechnen wir die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x=4$: $f'(4)=\frac{4\ln 4}{4}=\ln 4$



Jetzt bestimmen wir den spitzen Winkel, den die Tangente mit der x-Achse einschließt. Aus der Winkelsumme im Dreieck ergibt sich dann der halbe gesuchte Winkel:

$$\tan\alpha = \ln 4 \;\Rightarrow \alpha \approx 54{,}2°$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{2} = 180° - 90° - 54{,}2° = 35{,}8° \quad \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 71{,}6°}}$$

d) Die maximale Wassertiefe t_{max} ergibt sich aus dem Funktionswert von f an der Stelle $x = 0{,}2$ und der Tiefe unterhalb der x-Achse, also im TIP bei $x = 1$.

$$t_{max} = f(0{,}2) + |f(1)| = 2\left((\ln 0{,}2)^2 - 1\right) + 2 \approx \underline{\underline{5{,}18}}$$

Die maximale Wassertiefe des Aquariums beträgt **5,18 m**.

e) Die Grundfläche ist die doppelte Fläche, die von dem Graphen von f, der waagrechten Geraden $y = f(0{,}2)$ und der senkrechten Geraden $x = 4$ eingeschlossen wird, also:

$$G = 2 \cdot \int_{0{,}2}^{4} f(0{,}2) - f(x)dx$$

Für das Volumen ergibt sich dann: $V = 12 \cdot 2 \cdot \int_{0{,}2}^{4} f(0{,}2) - f(x)dx = \underline{\underline{24 \cdot \int_{0{,}2}^{4} f(0{,}2) - f(x)dx}}$

