Geometrie Aufgabengruppe 1

a) $E: \vec{X} = \vec{S_1} + \alpha \cdot \overrightarrow{S_1S_2} + \beta \cdot \overrightarrow{S_1S_3}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2,5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-6 \\ 3-2,5 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 6-0 \\ 0-6 \\ 2,5-2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2,5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0,5 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{S_1S_2} \times \overrightarrow{S_1S_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 36 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow E: x_1 + x_2 + 12x_3 + c = 0$$

Einsetzen des Aufpunkts S_1 ergibt: $0 + 6 + 12 \cdot 2,5 + c = 0 \Rightarrow c = -36$

$\Rightarrow \underline{\underline{E: x_1 + x_2 + 12x_3 - 36 = 0}}$

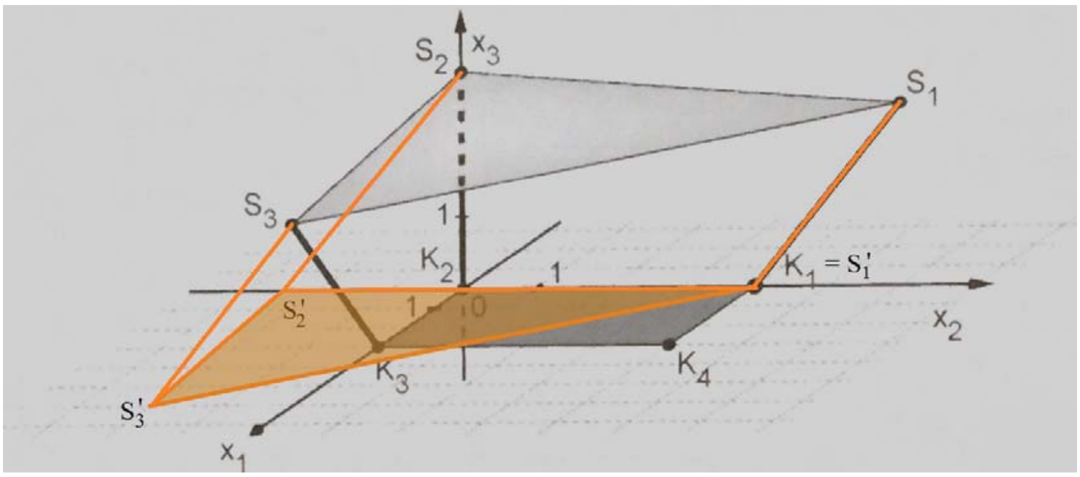
b) Zu berechnen ist die Fläche des Dreiecks $S_1S_2S_3$.

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{S_1S_2} \times \overrightarrow{S_1S_3}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 36 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9+9+36^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1314} = \underline{\underline{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{146} \approx 18,12}}$$

Die Sonnensegelfläche beträgt weniger als 20 m^2. Daher ist keine zusätzliche Sicherung notwendig.

c) Der Vektor $\overrightarrow{S_1K_1}$ läuft parallel zur x_2x_3-Ebene. Da auch S_2 in der x_2x_3-Ebene liegt, wird S_2 auf einen Punkt in der x_2x_3-Ebene abgebildet. Andererseits liegt der Bildpunkt in der x_1x_2-Ebene (Schatten) und somit auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen. Das ist die x_2-Achse.

d) (zur Kontrolle: $S_2'(0/-2,4/0)$; $S_3'(6/-2/0)$)



Aus der Zeichnung ergibt sich, dass mehr als die Hälfte des Sandkastens beschattet ist.

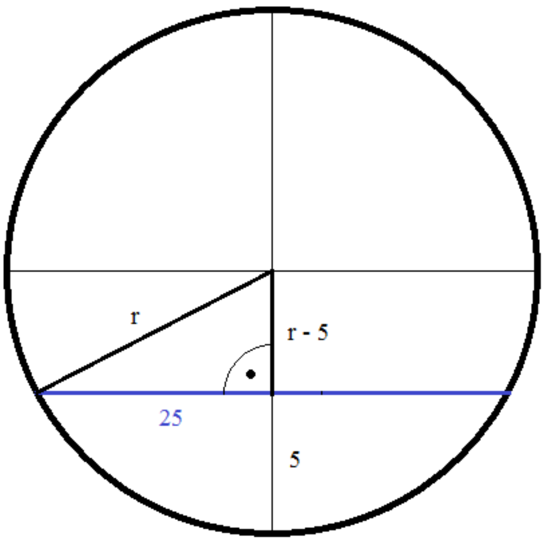
e) Gesucht ist der Winkel zwischen der Ebene E und der x_1x_2-Ebene, also der Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren.

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\12\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\12\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{0+0+12}{\sqrt{1^2+1^2+12^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{12}{\sqrt{146}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 6{,}72^0 < 8°}}$$

Das Abfließen des Regenwassers ist daher nicht sichergestellt.

f)



Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich:

$$25^2 + (r-5)^2 = r^2 \quad \Rightarrow 625 + r^2 - 10r + 25 = r^2 \quad \Rightarrow 10r = 650 \;\; \Rightarrow r = 65\,\text{cm} = 0{,}65\,\text{m}$$

Mit der Tiefe der Wassertasche $h = 0{,}05\,\text{m}$ lässt sich jetzt deren Volumen berechnen:

$$V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 0{,}05^2\cdot(3\cdot 0{,}65 - 0{,}05) = 0{,}004974\,\text{m}^3 = \underline{\underline{4{,}974\,\text{dm}^2 \approx 5\,\text{Liter}}}$$