Analysis Aufgabengruppe 2

1

a) Aus den Nullstellen lässt sich bereits eine Rohfassung aufstellen. Dort setzen wir dann den gegebenen Punkt ein:

$$f(x) = a \cdot x \cdot (x-5)(x-10)$$

$$\underline{(1/2)\text{ eingesetzt}}:\ 2 = a \cdot 1 \cdot (1-5)(1-10) \ \Rightarrow 2 = a \cdot (-4)(-9) \Rightarrow 2 = 36a \Rightarrow a = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{18} \cdot x \cdot (x-5)(x-10) = \frac{1}{18} \cdot x \cdot (x^2 - 5x - 10x + 50) \ = \underline{\underline{\frac{1}{18} \cdot (x^3 - 15x^2 + 50x)}}$$

b) $f'(x) = \frac{1}{18} \cdot (3x^2 - 30x + 50);\ f''(x) = \frac{1}{18} \cdot (6x - 30)$

Wendepunkt

$$\underline{f''(x) = 0}:\ \frac{1}{18} \cdot (6x - 30) = 0 \ \Rightarrow 6x = 30 \ \Rightarrow x'' = 5$$

Da es sich um eine **einfache** Nullstelle der 2. Ableitung handelt (mit Vorzeichenwechsel), hat der Graph von f dort einen Wendepunkt. Dieser hat die Koordinaten (5/0) (s.o.).

Wendetangente

Die Steigung ist die Steigung des Graphen von f bei $x'' = 5$.

$$m = f'(5) = \frac{1}{18} \cdot (3 \cdot 25 - 30 \cdot 5 + 50) = -\frac{25}{18}$$

m und W in die allgemeine Geradengleichung eingesetzt ergibt:

$$0 = -\frac{25}{18} \cdot 5 + t \ \Rightarrow t = \frac{125}{18}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = -\frac{25}{18}x + \frac{125}{18}}}$$

c) Der Graph von f ist symmetrisch zu seinem Wendepunkt, wenn der Graph der Funktion f*, die sich durch Verschiebung von G_f um 5 in negative x-Richtung ergibt, symmetrisch zum Ursprung ist.

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \frac{1}{18} \cdot \left((x+5)^3 - 15(x+5)^2 + 50(x+5)\right) \\ &= \frac{1}{18} \cdot \left((x^2 + 10x + 25)(x+5) - 15(x^2 + 10x + 25) + 50x + 250\right) \\ &= \frac{1}{18} \cdot \left(x^3 + 10x^2 + 25x + 5x^2 + 50x + 125 - 15x^2 - 150x - 375 + 50x + 250\right) \\ &= \frac{1}{18} \cdot \left(x^3 - 25x\right) = g(x) \end{aligned}$$

Der Graph von g muss also um 5 in positive x-Richtung verschoben werden.

$$g(-x) = \frac{1}{18} \cdot \left((-x)^3 - 25(-x)\right) = \frac{1}{18} \cdot \left(-x^3 + 25x\right) = -g(x)$$

Der Graph von g ist somit punktsymmetrisch zum Ursprung und der Graph von f daher punktsymmetrisch zu seinem Wendepunkt (5/0).

d) Jede Integralfunktion hat eine Nullstelle, wenn Unter- und Obergrenze übereinstimmen, hier also für $x = 1$.

Weitere Nullstellen kann es geben, wenn im Integrationsbereich gleich große Flächenstücke oberhalb und unterhalb der x-Achse vorliegen und sich diese beim „Durchintegrieren" gegenseitig aufheben. Für $x = 9$ gibt es eine Fläche unterhalb der x-Achse für $4 \le x \le 9$, die genauso groß ist wie die Fläche zwischen $x = 1$ und $x = 4$ (wegen der Symmetrie). Also gibt es eine zweite **Nullstelle** der Integralfunktion für $x = 9$.

e) Für $x \ge 10$ gibt es eine Fläche oberhalb der x-Achse, die gleich groß ist wie die Fläche für $5 \le x \le 10$. Daher gibt es eine weitere positive Nullstelle von F_1.

f) F_1 ist eine Integral- und somit auch eine Stammfunktion von f. Eine Stammfunktion einer ganzrationalen Funktion 3. Grades ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades. Eine solche hat maximal vier Nullstellen.

g) Die Graphen von h und f haben die gleichen Nullstellen, also $x = 0$ und $x = 5$.

Daher hat h die Periode 10. Es gilt: $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow h_1(x) = \sin\left(\frac{\pi}{5}x\right)$

Der Graph von h verläuft nicht unterhalb der x-Achse, er wird also im Vergleich zur „normalen" Sinus-Funktion nicht an der x-Achse gespiegelt. $\Rightarrow h_2(x) = \sin\left(\frac{\pi}{5}x\right)$

Der Graph von h ist auch nicht in x- oder y-Richtung verschoben. Daher gilt:

$$h(x) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5}x\right)$$

$$\int_0^5 h(x)dx = \frac{625}{72} \Rightarrow \int_0^5 a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5}x\right)dx = \frac{625}{72} \quad \Rightarrow \left[-a \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{5}x\right)\right) : \frac{\pi}{5}\right]_0^5 = \frac{625}{72}$$

$$\Rightarrow \left[-a \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{5}x\right)\right) \cdot \frac{5}{\pi}\right]_0^5 = \frac{625}{72}$$

$$\Rightarrow \left[-a \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot 5\right)\right) \cdot \frac{5}{\pi}\right] - \left[-a \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot 0\right)\right) \cdot \frac{5}{\pi}\right] = \frac{625}{72}$$

$$\Rightarrow \left[-a \cdot (\cos(\pi)) \cdot \frac{5}{\pi}\right] + \left[a \cdot (\cos(0)) \cdot \frac{5}{\pi}\right] = \frac{625}{72} \quad \Rightarrow \left[-a \cdot (-1) \cdot \frac{5}{\pi}\right] + \left[a \cdot \frac{5}{\pi}\right] = \frac{625}{72}$$

$$\Rightarrow \frac{5a}{\pi} + \frac{5a}{\pi} = \frac{625}{72} \Rightarrow \frac{10a}{\pi} = \frac{625}{72} \Rightarrow 10a = \frac{625\pi}{72} \Rightarrow a = \frac{125\pi}{144}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{h(x) = \frac{125\pi}{144} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5}x\right)}}$$

2

a) α) Eine Parallele zur x-Achse im Abstand 125 schneidet den Graphen bei $x = 7$.
Die entsprechende Produktionsmenge beträgt 7 Kubikmeter.

β) K ist im gesamten Definitionsbereich streng monoton zunehmend. Dabei verlangsamt sich die Zunahme der Kosten zunächst. Etwa ab $x = 4$ (Wendepunkt) nehmen die Kosten immer mehr zu.

b) $G(4) = E(4) - K(4) = 23 \cdot 4 - (4^3 - 12 \cdot 4^2 + 50 \cdot 4 + 20)$
$= 92 - 92 = 0$

Wenn vier Kubikmeter verkauft werden, macht das Unternehmen also weder Gewinn noch Verlust (Break-Even-Punkt).

c) In dem grün schraffierten Bereich, also für $4 < x \le 9$ erzielt das Unternehmen Gewinn.

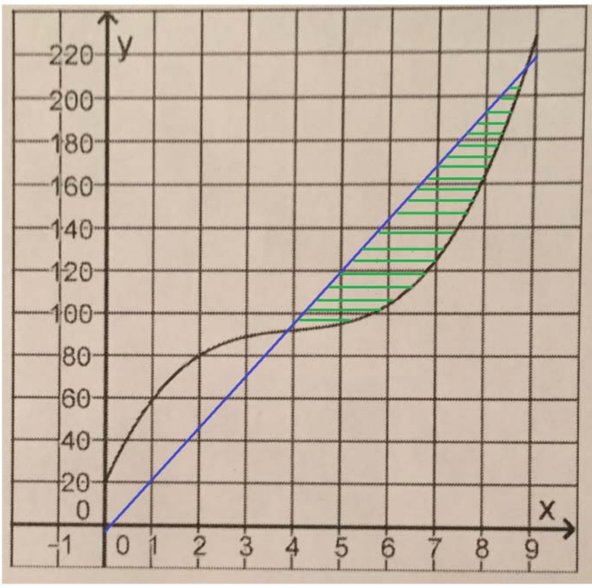

Abb. 2

d) $G(x) = E(x) - K(x) = 23x - (x^3 - 12x^2 + 50x + 20) = -x^3 + 12x^2 - 27x - 20$

$G'(x) = -3x^2 + 24x - 27;\ G''(x) = -6x + 24$

$\underline{G'(x) = 0}:\ -3x^2 + 24x - 27 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 9 = 0$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 4 \pm \sqrt{7}$$

$$\Rightarrow x_1 = 4 - \sqrt{7};\ x_2 = 4 + \sqrt{7}$$

$G''(4 - \sqrt{7}) = -6(4 - \sqrt{7}) + 24 > 0 \Rightarrow$ Minimum

$G''(4 + \sqrt{7}) = -6(4 + \sqrt{7}) + 24 < 0 \Rightarrow$ Maximum

Den größten Gewinn erzielt das Unternehmen, wenn $4 + \sqrt{7} \approx 6{,}6$ Kubikmeter der Flüssigkeit verkauft werden.

