

Analysis Aufgabengruppe 1

1 $f(x) = 2((\ln x)^2 - 1); D_f = \mathbb{R}^+$

a) $f(x) = 0: 2((\ln x)^2 - 1) = 0 \Rightarrow (\ln x)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (\ln x)^2 = 1 \Rightarrow \ln x = \pm 1$
 $\Rightarrow x_1 = e^1 = \underline{e}; x_2 = \underline{e^{-1}}$

$$f'(x) = 2\left(2 \cdot (\ln x) \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{4 \ln x}{x}; f''(x) = \frac{x \cdot \frac{4}{x} - 4(\ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{4 - 4 \ln x}{x^2}$$

$f'(x) = 0: \frac{4 \ln x}{x} = 0 \Rightarrow 4 \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

$$\left. \begin{array}{l} f''(1) = \frac{4 - 4 \ln 1}{1^2} = 4 > 0 \\ f(1) = 2((\ln 1)^2 - 1) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\text{TIP}(1/-2)}}$$

Hinweis: Die Art des Extremums ergibt sich auch aus dem Graphen. Die Punkte für die 2. Ableitung sollten daher bei Teilaufgabe b gutgeschrieben werden, wenn diese bereits in a bestimmt wurde.

b) Wendepunkt

$f''(x) = 0: \frac{4 - 4 \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 4 - 4 \ln x = 0 \Rightarrow 4 \ln x = 4 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$

Da es sich um eine einfache Nullstelle der 2. Ableitung handelt, liegt hier ein Wendepunkt vor. Es handelt sich dabei um die rechte Nullstelle von f (vgl. a).

$\Rightarrow \underline{\underline{W(e/0)}}$

Wendetangente

Die Steigung ist die Steigung des Graphen von f bei $x = e$.

$$m = f'(e) = \frac{4 \ln e}{e} = \frac{4}{e} = 1$$

m und W in die allgemeine Geradengleichung eingesetzt ergibt:

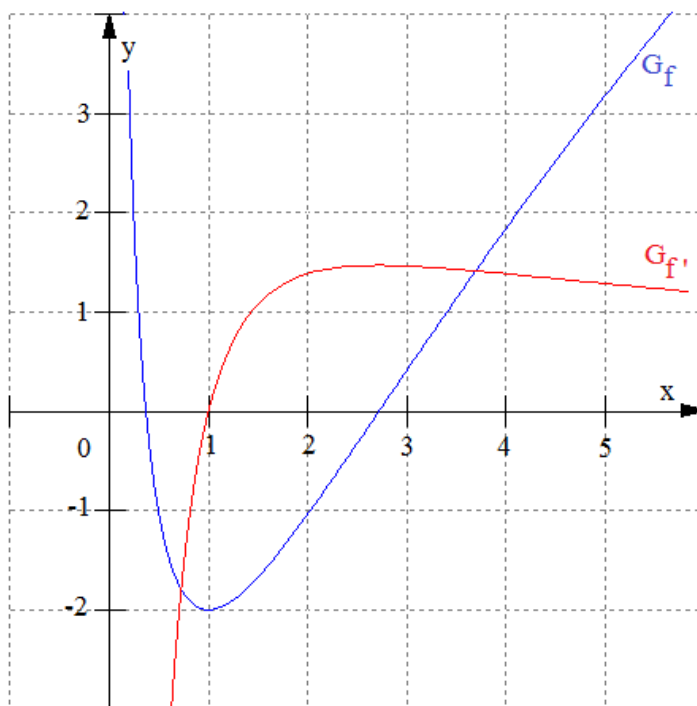
$0 = 1 \cdot e + t \Rightarrow t = -e$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = x - e}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = \underline{\underline{-\infty}}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \ln x}{x} = \frac{\infty^1}{\infty^2} = \underline{\underline{0}}$$

$f'(0,5) = \frac{4 \ln 0,5}{0,5} \approx \underline{\underline{-5,5}}; f'(10) = \frac{4 \ln 10}{10} \approx \underline{\underline{0,9}}$



- d) Jede Integralfunktion hat eine Nullstelle, wenn Unter- und Obergrenze übereinstimmen, hier also für $x = e^{-1}$. Weitere Nullstellen kann es geben, wenn im Integrationsbereich gleich große Flächenstücke oberhalb und unterhalb der x-Achse vorliegen und sich diese beim „Durchintegrieren“ gegenseitig aufheben. Für $x > e$ gibt es eine Fläche oberhalb der x-Achse, die genauso groß ist wie die Fläche zwischen $x = e^{-1}$ und $x = e$. Also gibt es insgesamt **zwei Nullstellen** der Integralfunktion für $c \in]0; 6]$.

e) $h(x) = 1,5x - 4,5 + \frac{1}{x}$

Die **schräge** Asymptote lässt sich direkt ablesen, da die Asymptotenform vorliegt:
 $y = 1,5x - 4,5$

Die **senkrechte** Asymptote ergibt sich bei der Definitionslücke: $x = 0$

f)
$$\int_1^2 h(x) dx = \int_1^2 \left(1,5x - 4,5 + \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{3}{4}x^2 - 4,5x + \ln x \right]_1^2$$

$$= \left[\frac{3}{4} \cdot 4 - 9 + \ln 2 \right] - \left[\frac{3}{4} - 4,5 + \ln 1 \right] = \ln 2 - 6 + 3,75 = \ln 2 - 2,25 \approx -1,557$$

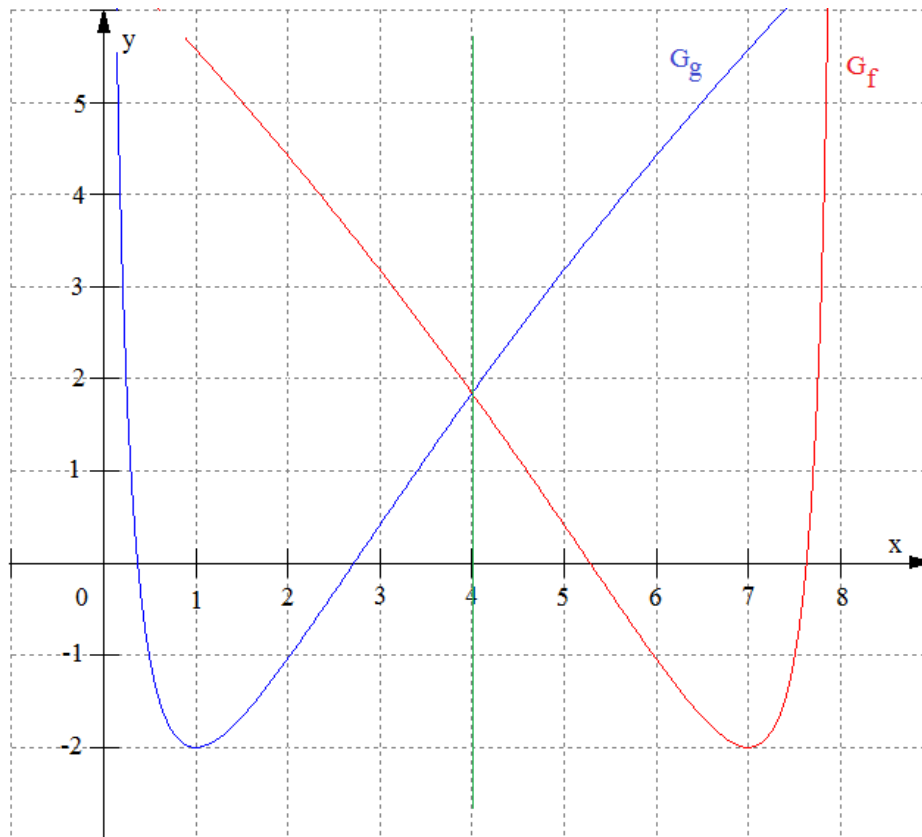
$\Rightarrow A_h \approx 1,557$

Die Abweichung der Fläche A_h von der Fläche A_f beträgt

$$\frac{1,623 - 1,557}{1,623} \approx 0,041 = \underline{\underline{4,1\%}}$$

2

a)



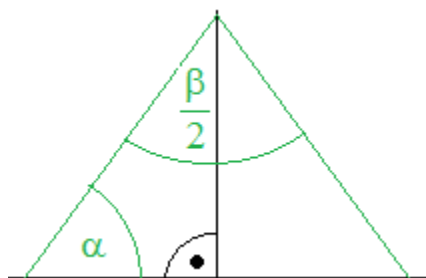
- b) Das Problem löst sich am einfachsten, indem man zunächst nur einen Punkt spiegelt, z.B. den TIP $(1/-2)$. Bei direkter Spiegelung an der Geraden $x = 4$ geht dieser in den Punkt $(7/-2)$ über. Daher Verschiebung um 6 nach rechts.

Spiegelt man zunächst an der y -Achse, geht der Punkt zunächst in $(-1/-2)$ über und muss danach entsprechend um 8 nach rechts verschoben werden. Daraus ergibt sich:

$$g(x) = 2 \cdot ((\ln(-(x-8)))^2 - 1) = 2 \cdot ((\ln(-x+8))^2 - 1) \Rightarrow \underline{a = -1}; \underline{b = 8}$$

- c) Zunächst berechnen wir die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle

$$x = 4: f'(4) = \frac{4 \ln 4}{4} = \ln 4$$



Jetzt bestimmen wir den spitzen Winkel, den die Tangente mit der x-Achse einschließt. Aus der Winkelsumme im Dreieck ergibt sich dann der halbe gesuchte Winkel:

$$\tan \alpha = \ln 4 \Rightarrow \alpha \approx 54,2^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{2} = 180^\circ - 90^\circ - 54,2^\circ = 35,8^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 71,6^\circ}}$$

- d) Die maximale Wassertiefe t_{\max} ergibt sich aus dem Funktionswert von f an der Stelle $x = 0,2$ und der Tiefe unterhalb der x-Achse, also im TIP bei $x = 1$.

$$t_{\max} = f(0,2) + |f(1)| = 2((\ln 0,2)^2 - 1) + 2 \approx \underline{\underline{5,18}}$$

Die maximale Wassertiefe des Aquariums beträgt **5,18 m**.

- e) Die Grundfläche ist die doppelte Fläche, die von dem Graphen von f , der waagrechten Geraden $y = f(0,2)$ und der senkrechten Geraden $x = 4$ eingeschlossen wird, also:

$$G = 2 \cdot \int_{0,2}^4 f(0,2) - f(x) dx$$

$$\text{Für das Volumen ergibt sich dann: } V = 12 \cdot 2 \cdot \int_{0,2}^4 f(0,2) - f(x) dx = \underline{\underline{24 \cdot \int_{0,2}^4 f(0,2) - f(x) dx}}$$