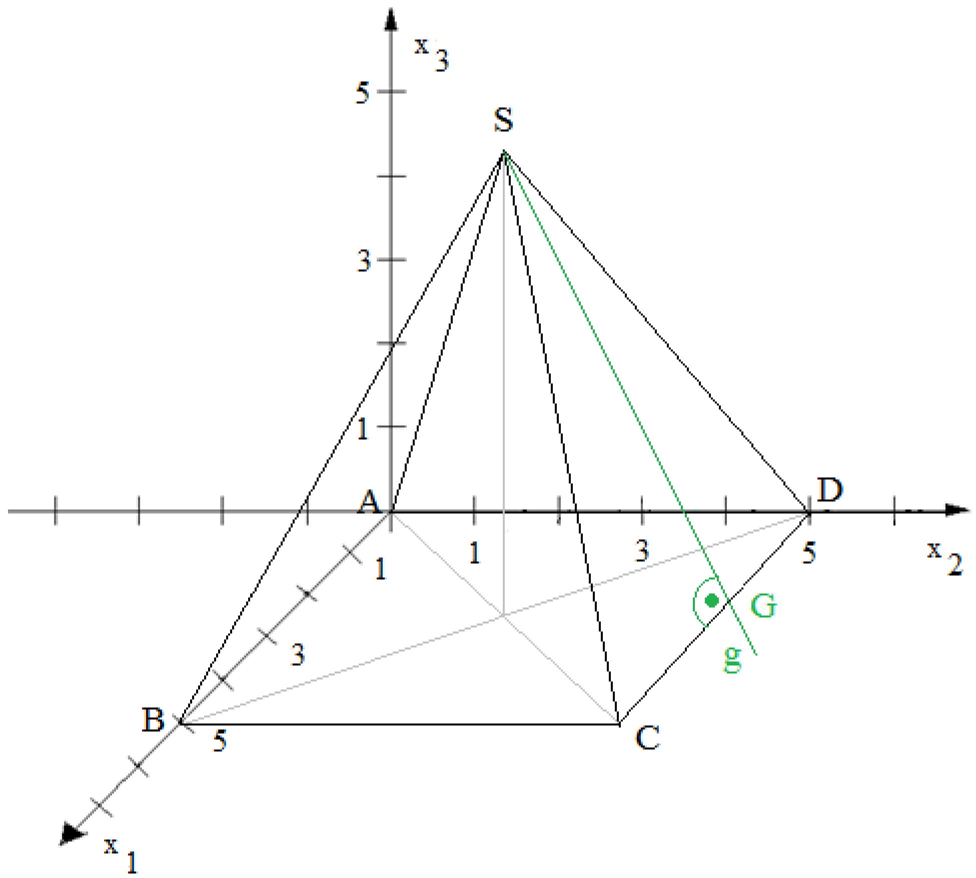
Geometrie Aufgabengruppe 2

a) $B(5/0/0)$; $D(0/5/0)$



b) $F:\vec{X}=\vec{A}+\alpha\cdot\overrightarrow{AD}+\beta\cdot\overrightarrow{AS}$

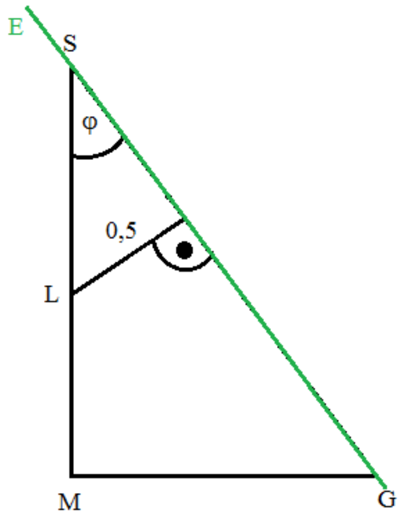
$$\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AS}=\begin{pmatrix}0-0\\5-0\\0-0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2,5-0\\2,5-0\\6-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2,5\\2,5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30\\0\\-12,5\end{pmatrix}=2,5\cdot\begin{pmatrix}12\\0\\-5\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{n}_F=\begin{pmatrix}12\\0\\-5\end{pmatrix}$$

$$F:\vec{n}_F\circ\left[\vec{X}-\vec{A}\right]=0\Rightarrow F:\begin{pmatrix}12\\0\\-5\end{pmatrix}\circ\left[\vec{X}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right]=0\Rightarrow \underline{\underline{F:12x_1-5x_3=0}}$$

c) Winkel zwischen Ebenen E und F:

$$\cos\varphi=\frac{\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}12\\0\\-5\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}12\\0\\-5\end{pmatrix}\right|}=\frac{-25}{13\cdot13}=-\frac{25}{169}\Rightarrow\underline{\underline{\varphi=98,51^\circ}}$$

d)



Zur Berechnung der Lichtquelle L gibt es verschiedene Ansätze. Der gegebene Abstand lässt sich als Abstand des (nicht bekannten) Punktes L von der Gerade GS oder auch als Abstand des Punktes L von der Ebene E interpretieren. Letzteres geht mit der HNF am schnellsten. Dabei gilt: $L(2{,}5/2{,}5/l_3)$

$$0{,}5=\frac{|0\cdot 2{,}5+12\cdot 2{,}5+5\cdot l_3-60|}{\left|\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}\right|}\Rightarrow 0{,}5=\frac{|5\cdot l_3-30|}{\sqrt{12^2+5^2}}$$

$\Rightarrow 5\cdot l_3-30=6{,}5 \Rightarrow 5\cdot l_3=36{,}5 \Rightarrow l_3=7{,}3>6 \rightarrow$ liegt oberhalb der Spitze S.

oder: $5\cdot l_3-30=-6{,}5 \Rightarrow 5\cdot l_3=23{,}5 \Rightarrow l_3=4{,}7 \Rightarrow \underline{\underline{L(2{,}5/2{,}5/4{,}7)}}$

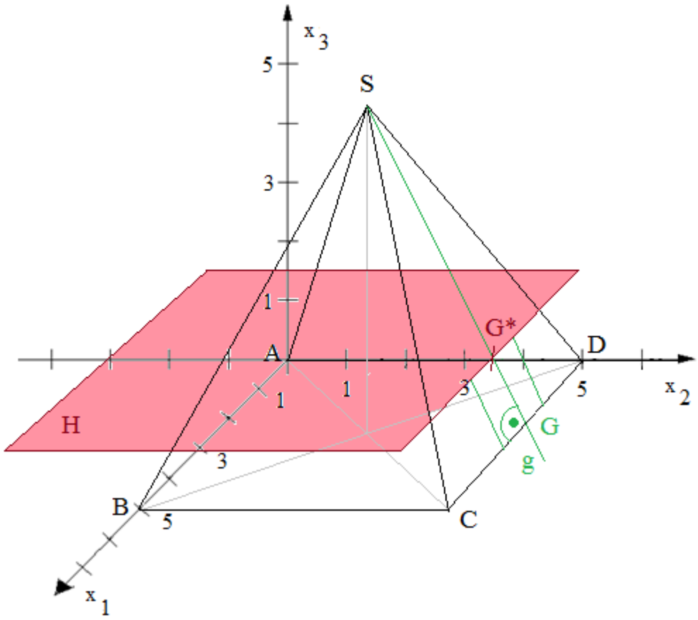
e) $g:\vec{X}=\vec{S}+\mu\cdot\overrightarrow{SG}$

$$\vec{G}=\vec{C}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0-5\\5-5\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2{,}5\\5\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{SG}=\begin{pmatrix}2{,}5-2{,}5\\5-2{,}5\\0-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2{,}5\\-6\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\-12\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Rightarrow g:\vec{X}=\begin{pmatrix}2{,}5\\2{,}5\\6\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\-12\end{pmatrix}}}$$

f)



Auch hier lohnt es sich, zunächst einige Überlegungen anzustellen, welcher der vielen möglichen Ansätze am einfachsten umzusetzen ist. Sinnvoll ist es, die soeben aufgestellte Gerade g mit einzubeziehen. Folgende Überlegung führt z.B. relativ schnell zum Ziel:

Wir bilden eine Hilfsebene H, die im Anstand 1,8 m parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft. Diese schneiden wir mit der Geraden g (vgl. e) und erhalten so den Schnittpunkt G*. Sodann berechnen wir den Mittelpunkt G der Strecke [CD]. Die Höhe h des Vordachs ist dann die Länge der Strecke [GG*]:

$$H: x_3 = 1{,}8$$

$$\underline{H \cap g}: 6 - 12\mu = 1{,}8 \quad \Rightarrow 12\mu = 4{,}2 \quad \Rightarrow \mu = 0{,}35$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{G^*} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 6 \end{pmatrix} + 0{,}35 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 4{,}25 \\ 1{,}8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{G} = \vec{C} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0-5 \\ 5-5 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h = \left|\overrightarrow{GG^*}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2{,}5-2{,}5 \\ 4{,}25-5 \\ 1{,}8-0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}75 \\ 1{,}8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0{,}5625 + 3{,}24} = 1{,}95$$

$$\Rightarrow A_{\text{Vordach}} = 1{,}4 \cdot 1{,}95 = \underline{\underline{2{,}73\,\text{m}^2}}$$