

Geometrie Aufgabengruppe 1

$$a) \quad \overrightarrow{AB}: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2-0 \\ 6-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die x_3 -Koordinate des Richtungsvektors ist null, die des Aufpunktes A ungleich null.
 Daher verläuft die Gerade AB parallel zur x_1x_2 -Ebene.

- b) Das Viereck ABCD ist ein Rechteck, wenn zwei gegenüberliegende Seiten zum gleichen Vektor führen und mindestens ein Winkel 90° beträgt, wenn also das entsprechende Skalarprodukt null ergibt.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -4 - (-6) \\ 8 - 2 \\ 5 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6-0 \\ 2-0 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -12 + 12 = 0$$

Das Parallelogramm ABCD ist also bei A rechtwinklig und daher ein Rechteck.

$$\vec{M} = \vec{A} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4-0 \\ 8-0 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{M(-2/4/3)}}$$

$$c) \quad E: \vec{X} = \vec{A} + \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -8 \\ 40 \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

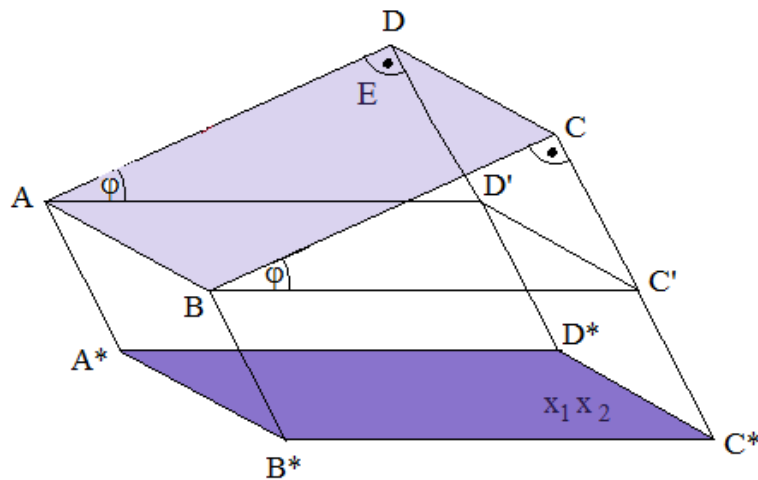
$$E: \vec{n}_E \circ [\vec{X} - \vec{A}] = 0 \Rightarrow E: \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \Rightarrow \underline{\underline{E: 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0}}$$

- d) Gesucht ist der Winkel φ zwischen der Ebene E und der x_1x_2 -Ebene,
 also zwischen deren Normalenvektoren:

$$\cos \varphi = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{5}{\sqrt{9+1+25} \cdot \sqrt{1}} = \frac{5}{\sqrt{35}} \Rightarrow \varphi = 32,31^\circ$$

Da $30^\circ \leq 32,31^\circ \leq 36^\circ$, ist die Bedingung erfüllt.

e)



AB ist parallel zur x_1x_2 -Ebene (siehe a). $\Rightarrow \overline{A^*B^*} = \overline{AB}$

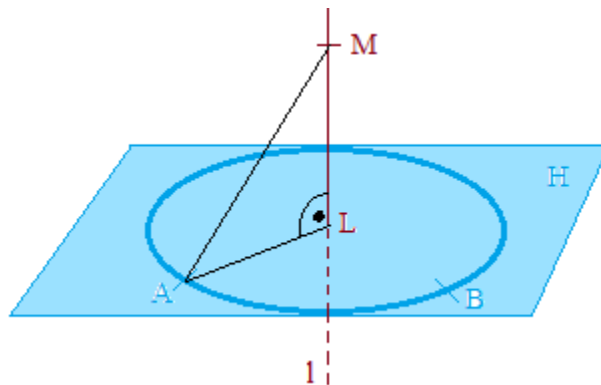
Im rechtwinkligen Dreieck $AD'D$ gilt $\cos \varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$:

$$\cos \varphi = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AD'}|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{A^*D^*}|} \Rightarrow |\overline{A^*D^*}| = \frac{|\overline{AD}|}{\cos \varphi}$$

Für die Fläche des Schattens gilt dann:

$$A_{A^*B^*C^*D^*} = |\overline{A^*B^*}| \cdot |\overline{A^*D^*}| \cdot (0,8\text{m})^2 = \underline{\underline{|\overline{AB}| \cdot \frac{|\overline{AD}|}{\cos \varphi} \cdot (0,8\text{m})^2}}$$

f)



Der Radius des Kreises ist der Abstand des Punktes A von der Geraden l durch den Punkt M und den Lotfußpunkt L . Der Richtungsvektor von l ist der der x_3 -Achse. Die Hilfsebene H enthält den Kreis und ist parallel zur x_1x_2 -Ebene.

Das Problem kann standardmäßig als Abstand Punkt A von der Geraden l gelöst werden (Möglichkeit 2) oder man überlegt sich die Koordinaten von L und bestimmt dann den Abstand des Punktes L vom Punkt A (Möglichkeit 1).

Möglichkeit 1

L hat die gleiche x_1 - und die gleiche x_2 -Koordinate wie M (vgl. b) und die gleiche x_3 -Koordinate wie A (siehe Skizze). $\Rightarrow L(-2/4/1)$

$$r = |\overline{LA}| = \left| \begin{pmatrix} -2-0 \\ 4-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

In Originalgröße beträgt der Radius $\sqrt{20} \cdot 0,8\text{m} \approx \underline{\underline{3,58\text{m}}}$.

Möglichkeit 2

$$l: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad H: x_3 = 1$$

$$l \cap H: 3 + \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = -2$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dots \text{ dann weiter wie oben.}$$