Geometrie Aufgabengruppe 2

A(–3 / –3 / 0); B(3 / –3 / 0); C(3 / 3 / 0); D(–3 / 3 / 0); S(0 / 0 / 4)

a) Für die Oberfläche berechnen wir zunächst die Fläche der Seitenfläche CDS mit der Formel: $A_{\Delta CDS} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{CD}\times\overrightarrow{CS}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-3-3\\3-3\\0-0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0-3\\0-3\\4-0\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\-3\\4\end{pmatrix}\right|$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\24\\18\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{24^2+18^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{900} = 15$$

Für die gesamte Oberfläche brauchen wir viermal die Seitenfläche und die quadratische Grundfläche: $A = 4\cdot 15 + 6^2 = \underline{\underline{96}}$

b) Symmetrieebenen

Alle Symmetrieebenen der Pyramide gehen durch den Ursprung und enthalten die Spitze S. Eine geht durch A und C, eine durch B und D und zwei weitere durch die Mittelpunkte der Seiten [AB] und [BC].

Die durch (2) beschriebene Ebene geht nicht durch den Ursprung und scheidet somit aus.

Die gesuchte Ebene wird vielmehr durch Gleichung (3) dargestellt.

Nicht notwendige Begründung: Die Ebene geht durch den Ursprung und enthält die x_3-Achse und somit auch S. Wegen $x_1 = -x_2$ liegen auch B und D in der Ebene.

c) $\overrightarrow{CD}\times\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix}0\\24\\18\end{pmatrix} = 6\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$ (vgl. a) $\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow E: 4x_2 + 3x_3 + c = 0$

S eingesetzt: $4\cdot 0 + 3\cdot 4 + c = 0 \;\Rightarrow c = -12$

$\Rightarrow \underline{\underline{E: 3x_2 + 4x_3 - 12 = 0}}$

d) I Dies ist die Gerade durch P, die senkrecht auf der Seitenfläche CDS (Ebene E) steht.

II Die Gerade setzen wir in die Ebene E ein und bekommen so den Lotfußpunkt.

III Die Länge des Vektors $\overrightarrow{PQ}$ ist der Abstand des Punktes P von den Seitenflächen, aber auch von der Grundfläche. Daher gilt: $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = p$

e) $E_k: 4k \cdot x_1 + 4\sqrt{1-k^2} \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 12 = 0$

Einsetzen von S ergibt: $4k \cdot 0 + 4\sqrt{1-k^2} \cdot 0 + 3 \cdot 4 - 12 = 0 \quad \Rightarrow 0 = 0$ w.A.

Daher liegt S in allen Ebenen E_k.

f) Wir berechnen zunächst den Winkel zwischen dem Normalenvektor der Ebene und dem Richtungsvektor der Geraden:

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 4k \\ 4\sqrt{1-k^2} \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4k \\ 4\sqrt{1-k^2} \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{3}{\sqrt{(4k)^2 + 16 \cdot (1-k^2) + 3^2} \cdot 1}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{16k^2 + 16 - 16k^2 + 9}} = \frac{3}{\sqrt{25}} = 0{,}6$$

Der Winkel ist unabhängig von k. Daher ist auch die Größe des Winkels zwischen Gerade und Ebene unabhängig von k.

g) E_{-1} enthält die Seitenfläche ADS. Schnittgerade mit der x_1x_2-Ebene ist daher die Gerade AD. Der Punkt mit dem kleinsten Abstand zu O ist der Mittelpunkt der Strecke [AD] auf der x_1-Achse: $R_{-1}(-3/0/0)$

E_1 enthält die Seitenfläche BCS. Schnittgerade mit der x_1x_2-Ebene ist daher die Gerade BC. Der Punkt mit dem kleinsten Abstand zu O ist der Mittelpunkt der Strecke [BC] auf der x_1-Achse: $R_1(3/0/0)$

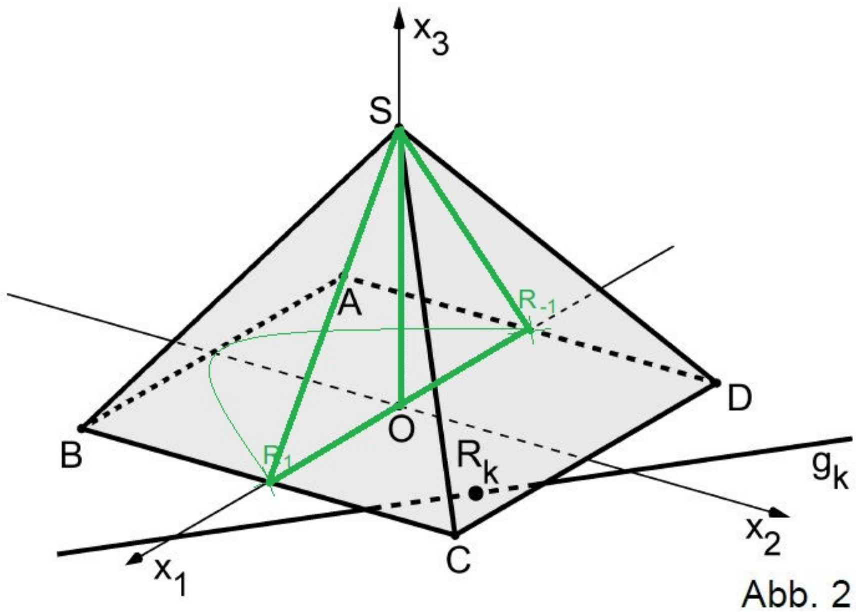

Abb. 2

h) Bei dem Körper handelt es sich um einen in der Mitte geteilten halben geraden Kreiskegel mit $r = 3$ und $h = 4$. Für das Volumen gilt: $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot 4 = \underline{\underline{6\pi}}$

