Geometrie Aufgabengruppe 1

A(8 / 0 / 6); B(7 / 1 / 6); S(0 / 0 / 10)

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7-8 \\ 1-0 \\ 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$

Da A und B die gleiche x_3-Koordinate haben, ist die Strecke [AB] parallel zur x_1x_2-Ebene.

b) Für die Ebenengleichung nehmen wir A als Aufpunkt sowie $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AS}$ als Richtungsvektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 0-8 \\ 0-0 \\ 10-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Für die Koordinatenform bilden wir das Kreuzprodukt der beiden gekürzten Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow E: x_1 + x_2 + 2x_3 + c = 0$

Einsetzen von A: $8 + 0 + 6 \cdot 2 + c = 0 \quad \Rightarrow c = -20 \quad \Rightarrow \underline{\underline{E: x_1 + x_2 + 2x_3 - 20 = 0}}$

c) $g_k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ -1 \end{pmatrix}$; C(9 / 1 / 5)

Wir setzen die Geradenschar in die Ebene ein:
$0 + \lambda \cdot (1+k) + 0 + \lambda \cdot (1-k) + 2(10-\lambda) - 20 = 0$
$\Rightarrow \lambda + \lambda \cdot k + \lambda - \lambda \cdot k + 20 - 2\lambda - 20 = 0 \quad \Rightarrow 0 = 0$ w.A.
Alle Geraden der Schar g_k liegen daher in der Ebene E.

Außerdem soll C auf der Geraden liegen. Wir setzen ein:

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I} & 9 = \lambda \cdot (1+k) \\ \text{II} & 1 = \lambda \cdot (1-k) \\ \text{III} & 5 = 10 - \lambda \ \Rightarrow \lambda = 5 \ (\text{III'}) \end{array}$$

III' in I: $9 = 5 + 5k \Rightarrow 5k = 4 \Rightarrow k = 0{,}8$
III' in II: $1 = 5 - 5k \Rightarrow 5k = 4 \Rightarrow k = 0{,}8$

Für $k = 0{,}8$ liegt C auf der Geraden $g_{0,8}$.

d) Es soll gelten: $2k^2 > 1$

Der Winkel zwischen der Gerade und der x_1x_2-Ebene ergibt sich, wenn wir den Winkel zwischen dem Richtungsvektor der Gerade und dem Normalenvektor der Ebene berechnen und diesen von 90° abziehen:

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-1}{\sqrt{(1+k)^2 + (1-k)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1 + 2k + k^2 + 1 - 2k + k^2 + 1} \cdot 1} = \frac{-1}{\sqrt{2k^2 + 3}}$$

Wegen der Achsensymmetrie der cos-Funktion gilt auch:

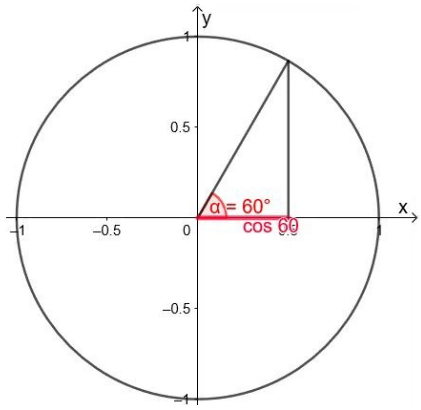
$$\cos(90^\circ - \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2k^2 + 3}}$$

Wegen $2k^2 > 1$ gilt: $\dfrac{1}{\underbrace{\sqrt{\underbrace{2k^2}_{>1} + 3}}_{>2}} < \dfrac{1}{2}$

N.R. $\cos(90^\circ - \varphi) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 90^\circ - \varphi = 60^\circ \Rightarrow \varphi = 30^\circ$

Es soll gelten: $\cos(90^\circ - \varphi) < \dfrac{1}{2}$

Zur Veranschaulichung ein Einheitskreis:

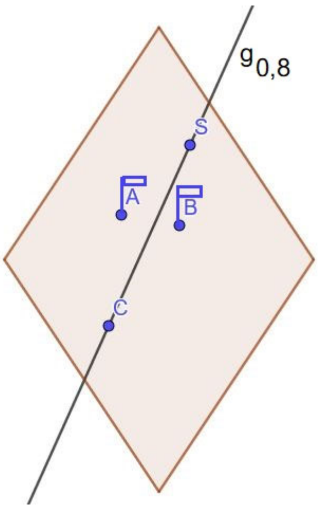


Der cos wird kleiner als 0,5, wenn der Winkel mehr als 60° beträgt.

Es muss also gelten: $90^\circ - \varphi > 60^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\varphi < 30^\circ}}$

Der Winkel zwischen jeder Gerade und der x_1x_2-Ebene ist daher immer kleiner als 30°.

e) $g_{0,8}: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1,8 \\ 0,2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $C(9/1/5)$; $1LE \triangleq 5m$



Breite des Tors: $\sqrt{2} \cdot 5m \approx \underline{\underline{7m}}$ (vgl. a)

Der Winkel zwischen der Gerade und der x_1x_2-Ebene ist dann kleiner als 30°, wenn gilt: $2k^2 > 1$ (vgl. d).

Für $k = 0,8$ ergibt sich: $2 \cdot 0,8^2 = 1,28 > 1$

Der Winkel ist daher kleiner als 30°.

f) Die Skifahrerin durchquert das Tor, wenn die Gerade AB die Gerade $g_{0,8}$ zwischen A und B schneidet.

Für die Gerade AB gilt: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen ergibt: $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1,8 \\ 0,2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{I } 8 - \mu = 1,8\lambda \\ \text{II } \mu = 0,2\lambda \\ \text{III } 6 = 10 - \lambda \Rightarrow \lambda = 4 \text{ (III')} \end{array}$

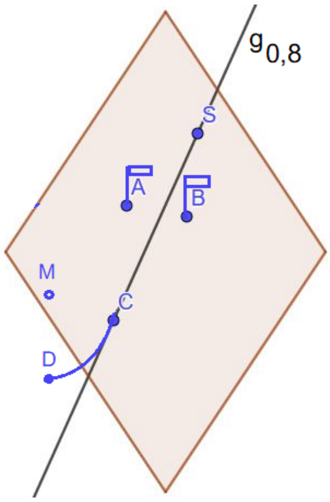
III' in I: $8 - \mu = 1,8 \cdot 4 \Rightarrow \mu = 0,8$
III' in II: $\mu = 0,2 \cdot 4 = 0,8$

Die beiden Geraden schneiden sich also.

Für den Schnittpunkt P gilt: $\vec{P} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + 0,8 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,2 \\ 0,8 \\ 6 \end{pmatrix}$

P hat die gleiche x_3-Koordinate wie A und B. Die x_1-Koordinate und die x_2-Koordinate liegen jeweils zwischen den entsprechenden Koordinaten von A und B. Die Gerade AB schneidet die Gerade $g_{0,8}$ also zwischen A und B.
Die Skifahrerin durchquert also das Tor.

g) $C(9/1/5)$ (vgl. c); $D(18/-2/2)$; $M(m_1/m_2/m_3)$



I $m_1 + m_2 + 2m_3 - 20 = 0$

Diese Gleichung ergibt sich, wenn man M in die Ebene E einsetzt.
M liegt daher in E.

$$\text{II} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 - 9 \\ m_2 - 1 \\ m_3 - 5 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{CM}} \circ \begin{pmatrix} 1,8 \\ 0,2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Das Skalarprodukt aus dem Vektor $\overrightarrow{CM}$ und dem Richtungsvektor von $g_{0,8}$ ist null. Daher stehen die beiden Vektoren aufeinander senkrecht. Der Kreisbogen berührt die Gerade also in C.

$$\text{III} \quad \sqrt{(m_1-9)^2+(m_2-1)^2+(m_3-5)^2} = \sqrt{(m_1-18)^2+(m_2+2)^2+(m_3-2)^2}$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{CM}\right| = \left|\overrightarrow{DM}\right|$$

C und D liegen also auf dem Kreisbogen um M.