Stochastik Aufgabengruppe 1

1

a) Es liegt eine Bernoulli-Kette vor mit $n = 200$.

$$P(D) = P(X=7) + P(X=8) = \binom{200}{7} \cdot 0{,}04^7 \cdot 0{,}96^{193} + \binom{200}{8} \cdot 0{,}04^8 \cdot 0{,}96^{192}$$
$$= \underline{\underline{0{,}28419 \approx 28{,}4\,\%}}$$

$$P(E) = P(Y > 135) = P(Y \geq 136) = 1 - P(Y \leq 135)$$
$$= 1 - \sum_{i=0}^{135} B(200; 0{,}65; i) \overset{TW}{=} 1 - 0{,}79183 = \underline{\underline{0{,}20817 \approx 20{,}8\,\%}}$$

b) $\sum_{k=0}^{25} \binom{200}{k} \cdot 0{,}1^k \cdot (1-0{,}1)^{200-k}$

F: „Höchstens 25 der 200 Pkw haben keinen Elektromotor."

c) Die Trefferquote für einen PKW mit Elektromotor beträgt 0,9.

$E(X) = 200 \cdot 0{,}9 = 180$; $Var(X) = 200 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 18 \Rightarrow \sigma = \sqrt{18} = \underline{\underline{4{,}24}}$

d) $Var(Z) = n \cdot p \cdot (1-p) = n \cdot (p - p^2) = n \cdot (-p^2 + p)$

Die Formel für die Varianz lässt sich als nach unten geöffnete Parabel mit der Variablen p interpretieren. Diese hat Nullstellen bei $p = 0$ und $p = 1$.

Der Scheitel (Maximum!) liegt genau in der Mitte zwischen den Nullstellen, also bei $p = 0{,}5$. Dort ist die Varianz also maximal.

e) Zunächst berechnen wir die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass ein Pkw mit Elektromotor einen Hybridmotor besitzt:

$$P_{E-Motor}(Hybrid) = \frac{0{,}25}{0{,}25 + 0{,}65} = \frac{0{,}25}{0{,}9} = \frac{5}{18}$$

Jetzt liegt wiederrum eine Bernoulli-Kette vor mit $n = 40$ und $p = \frac{5}{18}$:

$$P(X=10) = \binom{40}{10} \cdot \left(\frac{5}{18}\right)^{10} \cdot \left(\frac{13}{18}\right)^{30} = \underline{\underline{0{,}13345 \approx 13{,}3\ \%}}$$

 © Marcus ter Haerst

2 Eine klassische 3-mal-mindestens-Aufgabe, bei der allerdings zunächst die Trefferquote bestimmt werden muss:

Die Wahrscheinlichkeit für einen Pkw mit Elektromotor beträgt 1,2 % und entspricht $320.000+280.000=600.000$ Fahrzeugen.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Pkw mit rein elektrischem Motor beträgt daher $\frac{320.000}{600.000}\cdot 0{,}012=0{,}0064$.

$$P(X\geq 1)>0{,}97 \;\Rightarrow 1-P(X=0)>0{,}97 \;\Rightarrow P(X=0)<0{,}03$$

$$\Rightarrow \binom{n}{0}\cdot 0{,}0064^0\cdot 0{,}9936^n<0{,}03 \;\Rightarrow 0{,}9936^n<0{,}03 \;\Rightarrow n\cdot \ln 0{,}9936<\ln 0{,}03$$

$$\Rightarrow n>\frac{\ln 0{,}03}{\ln 0{,}9936}=546{,}14...$$

Es müssen also mindestens 547 Pkw ausgewählt werden.

3

a) Bekannte Größen sind grün gedruckt;

	A	B	
J			0,6
$\bar{J}$		x	0,4
	4b	b	1

Es gilt: $4b+b=1 \;\Rightarrow b=0{,}2;\; a=0{,}8$

Außerdem: $P_A(J)=P_B(J)$. A und J bzw. B und J sind daher stochastisch unabhängig. Es gilt daher: $P_B(J)=P(J)=0{,}6$

In die Formel eingesetzt ergibt sich: $P_B(J)=\frac{P(B\cap J)}{P(B)} \;\Rightarrow 0{,}6=\frac{P(B\cap J)}{0{,}2}$

$$\Rightarrow P(B\cap J)=0{,}6\cdot 0{,}2=0{,}12$$

Aus der Vierfeldertafel ergibt sich dann: $P(B\cap \bar{J})=0{,}2-0{,}12=\underline{\underline{0{,}08}}$

© Marcus ter Haerst

b) Jetzt gilt: $P_B(J) = 0{,}5$; aber keine Unabhängigkeit mehr!

Über die Formel ergibt sich: $P_B(J) = \dfrac{P(B \cap J)}{P(B)} \Rightarrow 0{,}5 = \dfrac{P(B \cap J)}{0{,}2}$

$\Rightarrow P(B \cap J) = 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1$

	A	B	
J	0,5	0,1	0,6
$\bar{J}$	0,3	0,1	0,4
	0,8	0,2	1

$$P_J(A) = \frac{P(A \cap J)}{P(J)} = \frac{0{,}5}{0{,}6} = \underline{\underline{\frac{5}{6} \approx 83{,}3\ \%}}$$

 © Marcus ter Haerst