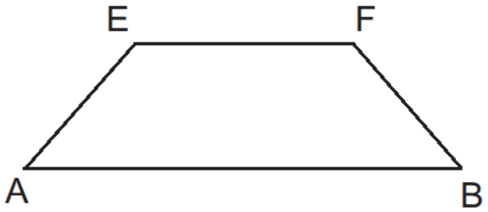
Geometrie Aufgabengruppe 1

A(19 / 0 / 0); B(0 / 19 / 0); E(12 / 0 / 7); F(0 / 12 / 7)

a)



Das Viereck ist ein Trapez, wenn zwei Vektoren Vielfache voneinander sind:

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0-19\\19-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-19\\19\\0\end{pmatrix}=19\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix};\ \overrightarrow{EF}=\begin{pmatrix}0-12\\12-0\\7-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\12\\0\end{pmatrix}=12\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EF}=\frac{12}{19}\cdot\overrightarrow{AB}\ \Rightarrow\ \text{ABFE ist ein Trapez.}$$

$$\left|\overrightarrow{AE}\right|=\left|\begin{pmatrix}12-19\\0-0\\7-0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-7\\0\\7\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-7)^2+0^2+7^2}=\sqrt{98}$$

$$\left|\overrightarrow{BF}\right|=\left|\begin{pmatrix}0-0\\12-19\\7-0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\-7\\7\end{pmatrix}\right|=\sqrt{0^2+(-7)^2+7^2}=\sqrt{98}=\left|\overrightarrow{AE}\right|$$

Das Trapez hat zwei gleich lange Seiten.

b) $$\overrightarrow{AB}_{\text{gekürzt}}\times\overrightarrow{AE}_{\text{gekürzt}}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\overrightarrow{n_L}$$

$\Rightarrow L: x_1+x_2+x_3+c=0$

A eingesetzt: $19+0+0+c=0\ \Rightarrow c=-19$

$\Rightarrow \underline{\underline{L: x_1+x_2+x_3-19=0}}$

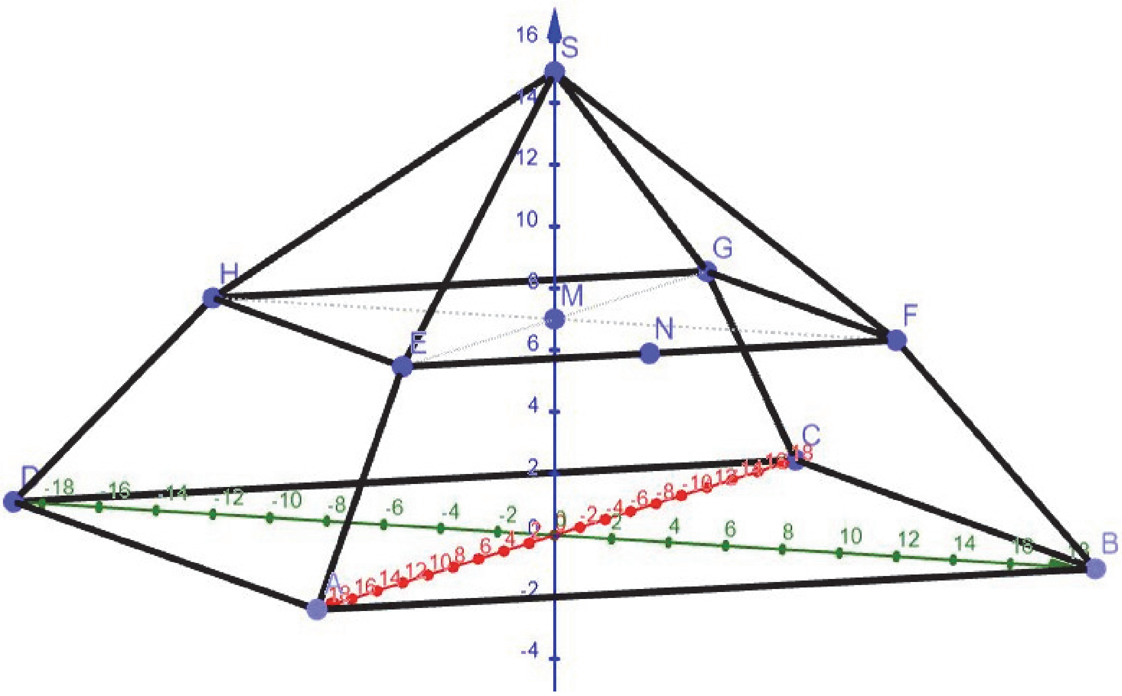
Der Winkel mit der x_1x_2-Ebene ist der Winkel zwischen den Normalenvektoren:

$$\cos\varphi=\frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot 1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ \Rightarrow \underline{\underline{\varphi\approx 54{,}7^\circ}}$$

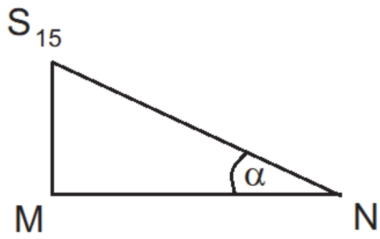
c) Damit sich eine Pyramide mit Seitenfläche ABFE ergibt, muss die Spitze $S_k(0/0/k)$ in der Ebene L liegen.

Einsetzen ergibt: $0+0+k-19=0 \Rightarrow \underline{\underline{k=19}}$

d) M ist der Mittelpunkt des Quadrats EFGH, N ist der Mittelpunkt der Strecke [EF] wegen $\vec{N}=\frac{1}{2}\left(\vec{E}+\vec{F}\right)$.



Es soll gelten: $\overline{MS_{15}}<\overline{MN}$



Wäre $\overline{MS_{15}}=\overline{MN}$, dann wären die beiden Basiswinkel des dann gleichschenkligen Dreiecks genau $45°$. Da in einem Dreieck der größeren Seite immer auch der größere Winkel gegenüberliegt, beträgt der Winkel zwischen den Seiten $[NM]$ und $[NS_{15}]$ und somit der Winkel zwischen der Seiten- und der Grundfläche der Pyramide weniger als $45°$.

e) Die Höhenveränderung ergibt sich aus den Spitzen der ursprünglichen (vgl. c) und der Knickpyramide. Der Höhenverlust beträgt $(19-15)\cdot 7\text{ m} = 28\text{ m}$.

Der Neigungswinkel des unteren Teils beträgt $54{,}7^\circ$ (vgl. b). Im oberen Teil beträgt dieser weniger als 45°. Der Unterschied beträgt $54{,}7^\circ - 45^\circ = 9{,}7^\circ$ und somit mehr als 9°.

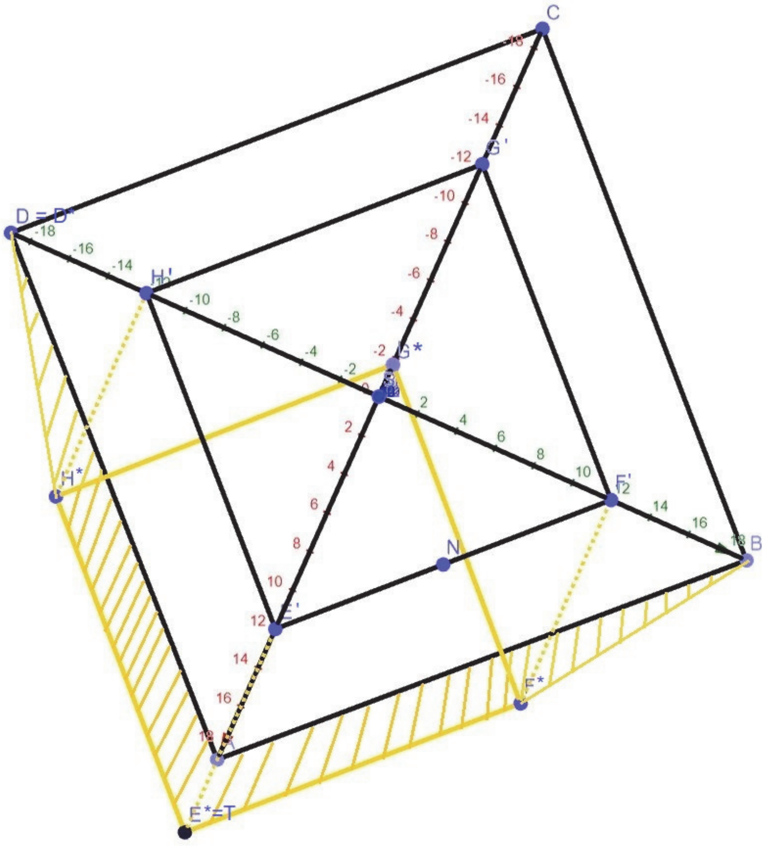
f) Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden $S_{15}E$ mit der x_1x_2-Ebene ($x_3 = 0$):

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 12-0 \\ 0-0 \\ 7-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Gerade in die x_1x_2-Ebene ergibt:
$15 - 8\lambda = 0 \Rightarrow 8\lambda = 15 \Rightarrow \lambda = 1{,}875$

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + 1{,}875 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{T(22{,}5/0/0)}}$$

g) G*, der Schattenpunkt von G, liegt innerhalb der Grundfläche, die anderen außerhalb. Bei Ansicht von oben ergibt sich folgendes Bild:



Die Schattenfläche besteht also aus zwei Trapezen mit der gemeinsamen Seite [E*A].