Analysis Aufgabengruppe 1

1 $f(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2}$

a) **Schnittpunkt mit der y-Achse**

$$f(0) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8}0^2} = 2 \cdot e^0 = 2 \cdot 1 = 2 \quad \Rightarrow \underline{\underline{T(0/2)}}$$

Achsensymmetrie

$$f(-x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8}(-x)^2} = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2} = f(x) \;\Rightarrow \text{Der Graph von f ist symmetrisch zur y-Achse.}$$

b) **Wendetangente in $W\left(-2/2e^{-\frac{1}{2}}\right)$**

Für die Wendetangente brauchen wir die Steigung in W und deren y-Achsenabschnitt t.

$$f'(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2} \cdot \left(-\frac{1}{8} \cdot 2x\right) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2}$$

$$f'(-2) = -\frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot e^{-\frac{1}{8}4} = e^{-\frac{1}{2}} = m$$

Allg. Geradengleichung: $y = mx + t$

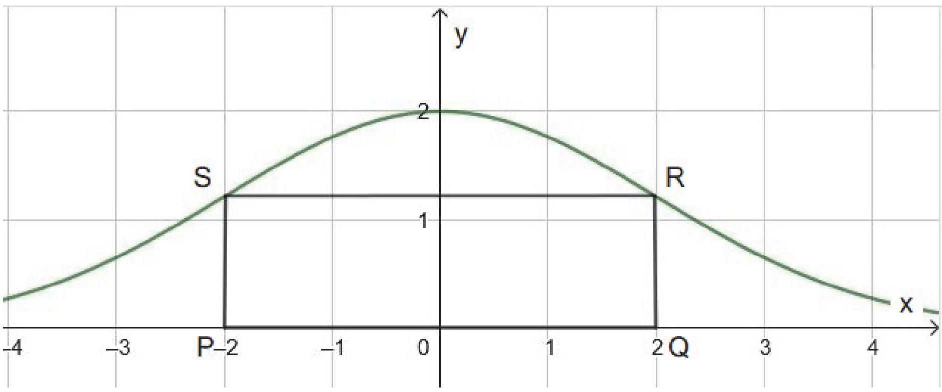
m und W eingesetzt: $2e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2) + t \;\Rightarrow t = 4e^{-\frac{1}{2}} \;\Rightarrow \underline{\underline{t(x) = e^{-\frac{1}{2}} \cdot x + 4e^{-\frac{1}{2}}}}$

Schnittpunkt mit der x-Achse

$$\underline{t(x) = 0:}\; e^{-\frac{1}{2}} \cdot x + 4e^{-\frac{1}{2}} = 0 \;\Rightarrow e^{-\frac{1}{2}} \cdot x = -4e^{-\frac{1}{2}} \;\Rightarrow x = \frac{-4e^{-\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}} = -4 \;\Rightarrow \underline{\underline{N(-4/0)}}$$

c) Rechteck mit den Eckpunkten $P(-c/0)$, $Q(c/0)$, $R(c/f(c))$, S

Für $c = 2$ ergibt sich: $P(-2/0)$, $Q(2/0)$, $\underbrace{R\left(2/2e^{-\frac{1}{2}}\right)}_{\text{Achsensymmetrie!}}$, $\underbrace{S\left(-2/2e^{-\frac{1}{2}}\right)}_{\text{siehe 1b}}$



d) Es soll gelten: $\overline{QR}=1$

$\underline{f(c)=1}$: $2\cdot e^{-\frac{1}{8}c^2}=1 \Rightarrow e^{-\frac{1}{8}c^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{8}c^2=\ln\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{8}c^2=-\ln 2$

$\Rightarrow c^2=8\ln 2 \Rightarrow \underline{\underline{c_1=\sqrt{8\ln 2}}}$; $(c_2=-\sqrt{8\ln 2})$

e) Länge des Rechtecks: $\overline{PQ}=2c$

Breite des Rechtecks: $\overline{QR}=2\cdot e^{-\frac{1}{8}c^2}$

Fläche des Rechtecks: $A(c)=2c\cdot 2\cdot e^{-\frac{1}{8}c^2}=\underline{\underline{4c\cdot e^{-\frac{1}{8}c^2}}}$

f) **Maximale Fläche**

$$A'(c)=4\cdot e^{-\frac{1}{8}c^2}+4c\cdot e^{-\frac{1}{8}c^2}\cdot\left(-\frac{2}{8}c\right)=e^{-\frac{1}{8}c^2}\left(4+4c\cdot\left(-\frac{2}{8}c\right)\right)=e^{-\frac{1}{8}c^2}\left(-c^2+4\right)$$

$\underline{A'(c)=0}$: $\underbrace{e^{-\frac{1}{8}c^2}}_{\neq 0}\left(-c^2+4\right)=0 \Rightarrow -c^2+4=0 \Rightarrow c^2=4 \Rightarrow c=2\ (c>0)$

$A'(1)=e^{-\frac{1}{8}}\cdot 3>0$. Links von $c=2$ nimmt A also zu. Somit handelt es sich bei $c=2$ um ein Maximum. Für $c=2$ ist die Fläche maximal.

g) $f_k(x)=f(x)+k;\ x\in\,]-\infty;0]$

f_k ist umkehrbar, wenn der Graph immer streng monoton steigend oder fallend ist, wenn also die Ableitung immer positiv oder immer negativ ist. Da k beim Ableiten rausfällt, gilt: $f_k'(x)=f'(x)$

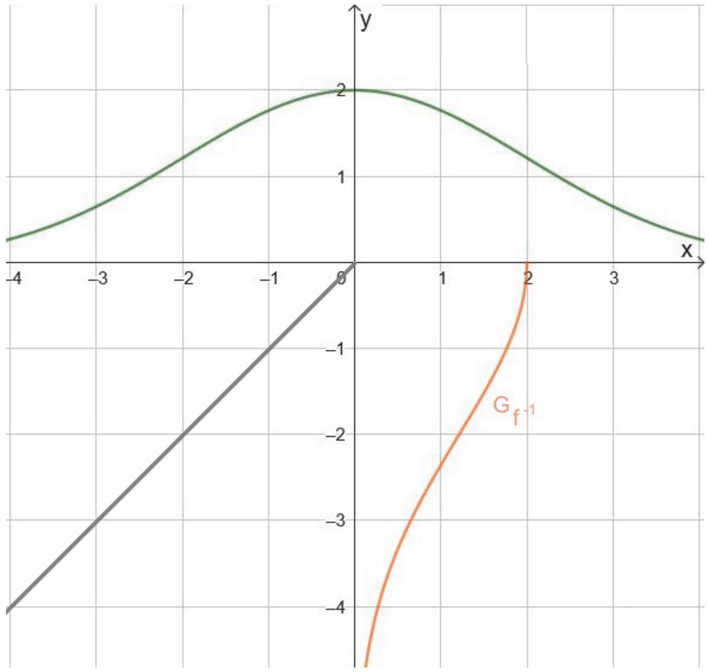
$$f_k'(x)=\underbrace{-\frac{1}{2}x}_{\geq 0}\cdot\underbrace{e^{-\frac{1}{8}x^2}}_{>0}\geq 0\quad(x\leq 0!)$$

f_k ist daher im Definitionsbereich streng monoton zunehmend und somit umkehrbar.

Graph

Für $k=0$ gilt: $f_k(x)=f(x)$

Zum Zeichnen empfiehlt es sich bei mehreren Punkten des Graphen von f x und y zu vertauschen. Oder: Spiegeln an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.



h) Damit sich die Graphen von f und der Umkehrfunktion schneiden, muss sich der Graph von f mit der Winkelhalbierenden des III. Quadranten schneiden. Dies ist der Fall, wenn man dessen linke Hälfte um 2 nach unten verschiebt ($k=-2$). Dann liegt der rechte Rand im Ursprung und damit auf der Winkelhalbierenden.

Keinen Schnittpunkt gibt es entsprechend für $k>-2$.

2

a) Höhe und Breite lassen sich aus dem Graphen von f ablesen:

Höhe = 2 m

Breite = 8 m

b) Fenster: $g(x)=ax^4+b$

Die Funktion g verhält sich ähnlich wie eine Parabel. Diese muss vorliegend nach unten geöffnet sein. Daher muss der Leitkoeffizient negativ sei, also $a<0$. Damit das Fenster nicht vollständig unterhalb der x-Achse liegt, muss der Scheitel (0/b) oberhalb der x-Achse liegen, also $b>0$.

c) f ist die Ableitung von F. Diese ist laut Graph immer positiv. In Abb. 3 sind Teile des Graphen fallend. Daher scheidet Abb. 3 aus.

Es gilt: $f(0)=F'(0)=2$. Die Steigung des Graphen von F an der Stelle $x=0$ muss also 2 betragen. Dies ist bei Abb. 2 offensichtlich nicht der Fall. Auch diese scheidet damit aus.

Daher stellt **Abb. 1** den Graphen von F dar.

d) Die Werte der Stammfunktion lassen sich näherungsweise der Abb. 1 entnehmen.

Fläche der gesamten Gaube

$$\int_{-4}^{4} f(x)dx = 2\cdot\int_{0}^{4} f(x)dx = 2\cdot[F(x)]_0^4 = 2\cdot[F(4)-F(0)] \approx 2[5-0] \approx 10$$

Die gesamte Gaube hat also eine Fläche von etwa $10\ m^2$.

Fläche ohne Fenster

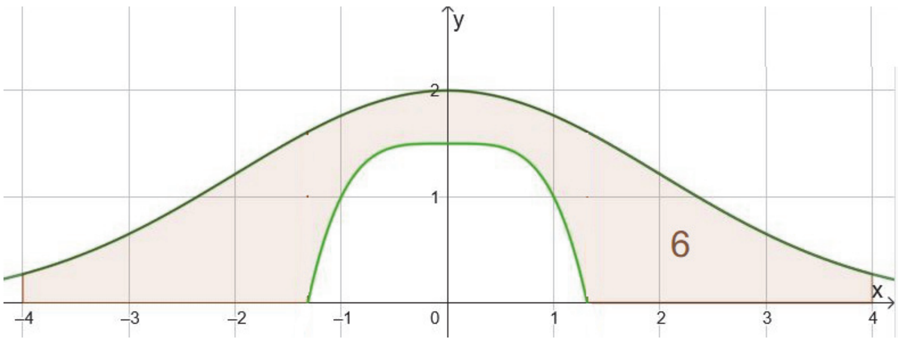
Die Fläche ohne Fenster soll $6\ m^2$ betragen. Also beträgt die Fläche des Fensters $10-6=4\ m^2$.

Es gilt: $g(x)=ax^4+1{,}5$

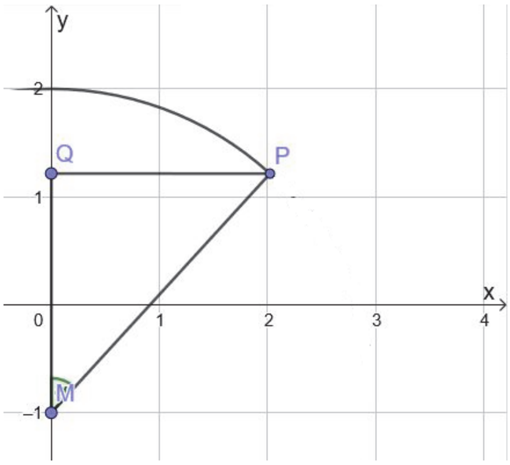
Von g benötigen wir zunächst die Nullstellen x_1 und x_2 ($x_1<x_2$).

Die Fensterfläche beträgt dann $\int_{x_1}^{x_2} g(x)dx$.

Ansatz: $\int_{x_1}^{x_2} g(x)dx = 4$



e)



Für die Länge des Kreisbogens benötgen wir zunächst den Mittelpunktswinkel des Sektors. Diesen bekommen wir mit den trigonometrischen Sätzen im rechtwinkligen Dreieck MPQ. Dort gilt: $\overline{MP} = 3$ (Radius) und $\overline{QP} = 2$.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \alpha \approx 41{,}8^0$$

Somit ergibt sich für den Kreisbogen: $b = \frac{41{,}8}{360} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \pi$

Dieser wird viermal benötigt. Insgesamt beträgt die Länge des Bogens der Fenstergaube also näherungsweise $4 \cdot \frac{41{,}8}{360} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \pi \approx 8{,}76$ m.

