Analysis Aufgabengruppe 2

1 $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-2}$

a) Der Nenner darf nicht null werden: $e^x-2=0 \Rightarrow e^x=2 \Rightarrow x=\ln 2$

$\Rightarrow D_f=\mathrm{IR}\setminus\{\ln 2\}$

Schnittpunkt mit der y-Achse

$$f(0)=\frac{e^0}{e^0-2}=\frac{1}{1-2}=-1 \Rightarrow \underline{\underline{T(0/-1)}}$$

b) $$f'(x)=\frac{(e^x-2)\cdot e^x-e^x\cdot e^x}{(e^x-2)^2}=\frac{e^x\left(e^x-2-e^x\right)}{(e^x-2)^2}=\underline{\underline{\frac{-2e^x}{(e^x-2)^2}}}$$

2 $g(x)=\sqrt{x}+1$

a) Tangente

$g(1)=\sqrt{1}+1=2$

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}};\quad g'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}=m$$

Jetzt setzen wir m und den ganzen Punkt in die allg. Geradengleichung

$y=mx+t$ ein: $2=\dfrac{1}{2}\cdot 1+t \Rightarrow t=\dfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \underline{\underline{t(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}}}$

b) Umkehrfunktion

Zunächst vertauschen wir x und y und lösen dann nach y auf:

$$x=\sqrt{y}+1 \Rightarrow \sqrt{y}=x-1 \Rightarrow y=(x-1)^2 \quad \Rightarrow \underline{\underline{f^{-1}(x)=(x-1)^2}}$$

3 $f(x)=-x^2+2ax;\ a\in\,]1;\infty[$; Nullstellen 0 und 2a

a) $$\int_0^{2a} f(x)dx=\int_0^{2a}-x^2+2ax\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{2ax^2}{2}\right]_0^{2a}=\left[-\frac{x^3}{3}+ax^2\right]_0^{2a}$$

$$=\left[-\frac{(2a)^3}{3}+a(2a)^2\right]-0=-\frac{8a^3}{3}+4a^3=\frac{4}{3}a^3 \quad\Rightarrow \underline{\underline{A=\frac{4}{3}a^3}}$$

b) Der Scheitel der Parabel liegt in der Mitte der Nullstellen, also bei $x=a$.

$f(a)=-a^2+2a^2=a^2 \Rightarrow$ Das Quadrat hat die Seitenlänge a^2 und die Fläche a^4.

Es soll gelten: $a^4=\dfrac{4}{3}a^3 \Rightarrow a^4-\dfrac{4}{3}a^3=0 \Rightarrow \underbrace{a^3}_{\neq 0}\left(a-\dfrac{4}{3}\right)=0 \Rightarrow \underline{\underline{a=\dfrac{4}{3}}}$

4

a) $h(x) = -g(x-3)$

Der Graph von h ergibt sich aus dem Graphen von g durch Spiegelung an der x-Achse und Verschiebung um 3 nach rechts. Der HOP von G_g wird so zum TIP von G_h mit $TIP(2/-1)$.

b) Der gegebene Graph ist die Ableitung der Stammfunktion G. Diese ist außer einer Nullstelle bei $x = 0$ immer positiv. Daher hat der Graph von G bei $x = 0$ einen Terrassenpunkt.

Bei $x = -1$ hat die Ableitung ein Maximum. Der Graph von G hat dort daher die stärkste Steigung und einen Wendepunkt.

Bei $x = -1$ und bei $x = 2$ ist die Steigung der Tangente des Graphen von G „1“.