Geometrie Aufgabengruppe 1

$P(4/5/-19);\ Q(5/9/-18);\ R(3/7/-17);\ g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5-4 \\ 9-5 \\ -18-(-19) \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+4^2+1^2} = \sqrt{18} = \underline{\underline{3\sqrt{2}}}$

$\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 5-7 \\ -19-(-17) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix};\quad \overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ 9-7 \\ -18-(-17) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{RP} \circ \overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2-4+2 = 0 \quad \Rightarrow \Delta_{PRQ}$ ist bei R rechtwinklig.

R liegt daher auf dem Thaleskreis über [PQ], dessen Durchmesser [PQ] ist.

b) $\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 + c = 0$

R eingesetzt: $2 \cdot 3 - 7 + 2 \cdot (-17) + c = 0 \ \Rightarrow c = 35$

$\Rightarrow \underline{\underline{E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 35 = 0}}$

Liegt g in E? Einsetzen von g in E ergibt:
$2(-12+\lambda) - (11+2\lambda) + 2(0+0\lambda) + 35 = 0 \quad \Rightarrow -24 + 2\lambda - 11 - 2\lambda + 35 = 0$
$\Rightarrow 0 = 0$ w.A.

Die Gerade g liegt daher in der Ebene E.

c) Sowohl die x_3-Koordinate des Aufpunkts von g als auch die des Richtungsvektors sind 0. Daher liegt g auch in der x_1x_2-Ebene.

d) Wir berechnen den Winkel zwischen den Normalenvektoren der Ebene E und der x_1x_2-Ebene:

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2} \cdot 1} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \underline{\underline{\varphi \approx 48{,}19^\circ}}$$

e) Gesucht ist der Abstand des Punktes O von der Geraden g. Dazu bilden wir eine Hilfsebene H durch O. Normalenvektor ist der Richtungsvektor von g. Dann schneiden wir g mit der Hilfsebene und bekommen so den Lotfußpunkt L. Der Abstand ist dann $\left|\overrightarrow{LO}\right|$.

$H: x_1 + 2x_2 + c = 0$

O eingesetzt: $c = 0 \quad \Rightarrow H: x_1 + 2x_2 = 0$

g in H: $-12 + \lambda + 2(11 + 2\lambda) = 0 \quad \Rightarrow -12 + \lambda + 22 + 4\lambda = 0 \quad \Rightarrow 5\lambda = -10 \quad \Rightarrow \lambda = -2$

$$\Rightarrow \vec{L} = \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{LO}\right| = \left\| \begin{pmatrix} 0-(-14) \\ 0-7 \\ 0-0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{14^2 + (-7)^2} = \sqrt{245} = \underline{\underline{7\sqrt{5}}}$$

Der Abstand der Boje von der Küste beträgt ca. 15,7 m.

f) Der Punkt K liegt unterhalb des Ursprungs O und hat daher die Koordinaten (0/0/k). Möglich ist hier ein Ansatz mit einer Hilfsgerade. Geschickter ist aber die Verwendung der HNF, da der Abstand von K zur Ebene E gegeben sowie zwei Koordinaten bekannt sind. Einsetzen in die HNF ergibt:

$$3 = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot k + 35|}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|} \quad \Rightarrow 3 = \frac{|2k + 35|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} \quad \Rightarrow |2k + 35| = 9$$

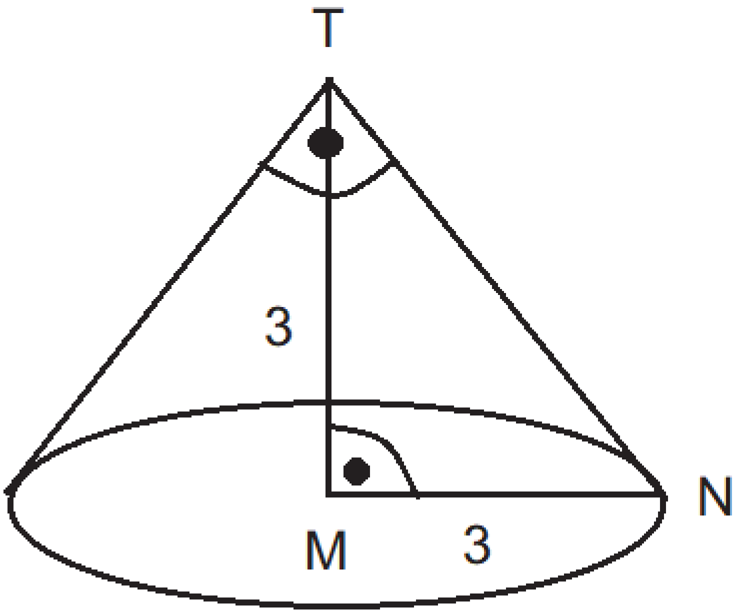
1. Fall: $2k + 35 = 9 \quad \Rightarrow 2k = -26 \quad \Rightarrow \underline{\underline{k = -13}}$
2. Fall: $2k + 35 = -9 \quad \Rightarrow 2k = -44 \quad \Rightarrow (k = -22)$

Der 2. Fall ergibt einen Punkt unterhalb der Ebene E und kommt somit nicht in Betracht.

$\Rightarrow \underline{\underline{K(0/0/-13)}}$

Der Taucher befindet sich in **13 m Tiefe**.

g)



Das Sichtfeld des Tauchers T kann durch einen rechtwinkligen Kegel dargestellt werden, dessen Grundfläche auf dem Meeresboden, also in der Ebene E liegt. Die Höhe beträgt 3. Da die Höhe den 90^0-Winkel an der Spitze halbiert, ist der Winkel bei N im Dreieck MNT 45^0 und dieses ist somit gleichschenklig. Daher ist auch $\overline{MN} = 3$. Der Durchmesser des Grundkreises beträgt somit 6.

Das Dreieck PQR hat einen Umkreis mit Durchmesser $3\sqrt{2}$ (vgl. a). Da $3\sqrt{2} < 6$, kann der Taucher alle drei Seesterne auf einem Bild aufnehmen.