Analysis Aufgabengruppe 2

1 $g(x)=\frac{2x^2}{x^2-9}=\frac{2x^2}{(x-3)(x+3)}$

a) Der Nenner darf nicht null werden: $D_g=\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$

waagrechte Asymptote

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-9}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(1-\underbrace{\frac{9}{x^2}}_{\to 0}\right)}=\frac{2}{1}=2$$

$\Rightarrow$ waagrechte Asymptote: $\underline{\underline{y=2}}$

Hinweis: Der Grenzwert zur Begründung ist nicht notwendig, die Asymptote kann auch direkt aus der Funktion ausgelesen werden.

b) **waagrechte Tangente**

$$g'(x)=\frac{(x^2-9)\cdot 4x-2x^2\cdot 2x}{(x^2-9)^2}=\frac{4x^3-36x-4x^3}{(x^2-9)^2}=\frac{-36x}{(x^2-9)^2}$$

Einzige Nullstelle der 1. Ableitung ist $x'=0$, daher hat der Graph von g in genau einem Punkt eine waagrechte Tangente.

2

a) $\int_1^7 f(x)dx=F(7)-F(1)\overset{\text{ablesen}}{=}5-1=\underline{\underline{4}}$

b) Es gilt: $f(1)=F'(1)$. Wir benötigen also die Steigung der Tangente an den Graphen von F. Einzeichnen der Tangente und Ablesen der Steigung ergibt:

$m_s=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4}{1}=\underline{\underline{4=f(1)}}$

3 $h(x)=\ln(2x-3);\ D_h=\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

a) **Nullstelle**

$\underline{h(x)=0}$: $\ln(2x-3)=0 \quad\Rightarrow 2x-3=1 \quad\Rightarrow 2x=4 \quad\Rightarrow \underline{\underline{x=2}}$

$h'(x)=\frac{1}{2x-3}\cdot 2=\underline{\underline{\frac{2}{2x-3}}}$

b) $g(x) = \ln(f(x))$

Der ln ist definiert, wenn die innere Funktion positiv ist. $\Rightarrow \underline{\underline{D_g =]2;+\infty[}}$

$g'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$

Es soll gelten: $g'(x) = f'(x) \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = f'(x) \quad \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) - f'(x) = 0$

$\Rightarrow f'(x) \cdot \left(\frac{1}{f(x)} - 1 \right) = 0 \quad \Rightarrow f'(x) = 0$. Diese Gleichung hat keine Lösung, da der Graph von f streng monoton steigend ist.

$\frac{1}{f(x)} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = 1 \quad \Rightarrow f(x) = 1$. Ablesen ergibt: $\underline{\underline{x = 4}}$

4 $f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$;

a) $f_a'(x) = a \cdot e^{-x} \cdot (-1) = -a \cdot e^{-x}$

$f_a'(0) = -a \cdot e^0 = \underline{\underline{-a}}$

b) $f_a(0) = a + 3$; Gleichung der Tangente: $t(x) = -a \cdot x + b$

Eingesetzt: $b = a + 3 \quad \Rightarrow t(x) = -a \cdot x + a + 3$

Es soll gelten:

I $f_a'(x) > 0: \; -a \cdot \underbrace{e^{-x}}_{>0} > 0 \Rightarrow a < 0$

II Nullstelle $> \frac{1}{2}$: $\underline{t(x) = 0}$: $-a \cdot x + a + 3 = 0 \Rightarrow a \cdot x = a + 3 \quad \Rightarrow x = \frac{a+3}{a}$

$\frac{a+3}{a} > \frac{1}{2} \Big| \cdot a \; (<0!) \quad \Rightarrow a + 3 < \frac{1}{2}a \quad \Rightarrow \frac{1}{2}a < -3 \quad \Rightarrow \underline{\underline{a < -6}}$

