Analysis Aufgabengruppe 1

1 $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$

a) Der Nenner darf nicht null werden: $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Nullstellen

$\underline{f(x)=0}$: $x^2+2x=0 \quad \Rightarrow x(x+2)=0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{x_1=0}};\ \underline{\underline{x_2=-2}}$

b) Möglich ist z.B. folgende Funktion: $h(x)=\dfrac{c}{x^2+1}+3$

(0/4) eingesetzt: $4=\dfrac{c}{0^2+1}+3 \quad \Rightarrow c=1 \quad \Rightarrow \underline{\underline{h(x)=\dfrac{1}{x^2+1}+3}}$

2 $g(x)=\dfrac{4}{x}$

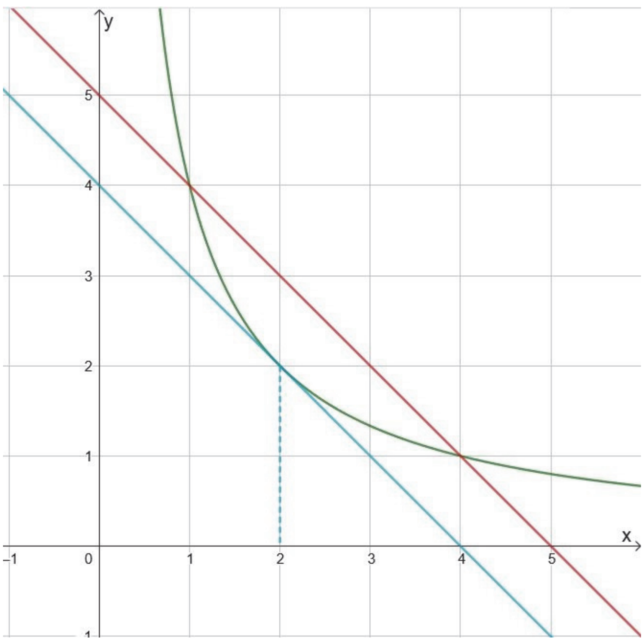
a) $\int_1^e g(x)dx=\int_1^e \dfrac{4}{x}dx \ =4[\ln x]_1^e \ =4[\ln e-\ln 1] \ =4[1-0]=\underline{\underline{4}}$

b) $g(1)=\dfrac{4}{1}=4;\ g(4)=\dfrac{4}{4}=1$

Mittlere Änderungsrate

$m_S=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{4-1}{1-4}=-1$

Die lokale Änderungsrate soll -1 betragen: Wir verschieben die Sekante parallel, bis sie den Graphen von g berührt und lesen dann den x-Wert ab:



$\Rightarrow \underline{\underline{x_0=2}}$

3 $g(x) = f(f(x))$

a) Aus der Abbildung ergibt sich: $f(6) = \underline{\underline{2}}$

$g(6) = f(f(6)) = f(2) = \underline{\underline{3}}$

b) $g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$

Der Graph von g hat eine waagrechte Tangente, wenn $g'(x) = 0$ bzw. wenn $f'(f(x)) = 0$ oder $f'(x) = 0$:

$f'(x) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1' = 3}}$

$f'(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) = 3$; ablesen aus dem Graphen ergibt: $\underline{\underline{x_2' = 2}}$; $\underline{\underline{x_3' = 5}}$

4 $f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$;

a) $f_a'(x) = a \cdot e^{-x} \cdot (-1) = -a \cdot e^{-x}$

$f_a'(0) = -a \cdot e^0 = \underline{\underline{-a}}$

b) $f_a(0) = a + 3$; Gleichung der Tangente: $t(x) = -a \cdot x + b$

Eingesetzt: $b = a + 3 \quad \Rightarrow t(x) = -a \cdot x + a + 3$

Es soll gelten:

I $\quad f_a'(x) > 0: \; -a \cdot \underbrace{e^{-x}}_{>0} > 0 \;\Rightarrow a < 0$

II Nullstelle $> \frac{1}{2}$: $\underline{t(x) = 0}$: $-a \cdot x + a + 3 = 0 \;\Rightarrow a \cdot x = a + 3 \;\Rightarrow x = \frac{a+3}{a}$

$\frac{a+3}{a} > \frac{1}{2} \,\Big|\cdot a \;(<0!) \quad \Rightarrow a + 3 < \frac{1}{2}a \quad \Rightarrow \frac{1}{2}a < -3 \quad \Rightarrow \underline{\underline{a < -6}}$

