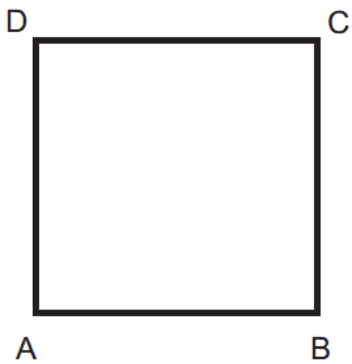
Geometrie Aufgabengruppe 1

$A(6/0/4)$, $B(0/6/4)$, $C(-6/0/4)$, $S(0/0/1)$

a) $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 0-6 \\ 0-0 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{AS}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-6 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{BS}\right| = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} = \left|\overrightarrow{AS}\right|$

Das Dreieck ABS ist daher gleichschenklig mit Basis [AB].



$\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6-0 \\ 0-6 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\Rightarrow \underline{\underline{D(0/-6/4)}}$

Die Ebene E ist parallel zur x_1x_2 – Ebene um 4 nach oben verschoben, da die x_1x_2 – Koordinate aller Punkte des Quadrats 4 beträgt. ($E: x_3 - 4 = 0$)

b) Für die Ebenengleichung nehmen wir S als Aufpunkt sowie $\overrightarrow{AS}$ und $\overrightarrow{BS}$ als Richtungsvektoren (s.o.):

Für die Koordinatenform bilden wir das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -18 \\ 36 \end{pmatrix} = -18 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow F: x_1 + x_2 - 2x_3 + c = 0$

Einsetzen von S: $-2 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = 2 \quad \Rightarrow \underline{\underline{F: x_1 + x_2 - 2x_3 + 2 = 0}}$

 © Marcus ter Haerst

c) **Grundfläche (Quadrat)**

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + 0^2} = \sqrt{72} \quad \Rightarrow A = \sqrt{72}^2 = 72$$

Volumen

Die Höhe beträgt offenbar 3 (Abstand der Spitze von der Ebene E).

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 72 \cdot 3 = \underline{\underline{72}}$$

d) **Durchmesser der Kugel**

Im Berührpunkt Q innerhalb des Dreiecks ABS steht der Radius r der Kugel senkrecht auf dem Dreieck und damit auf der Ebene F. Wir stellen eine Gerade l auf, mit M als Aufpunkt und dem Normalenvektor von F als Richtungsvektor. Diese schneiden wir mit F und bekommen so den Berührpunkt Q.

$$l: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

l in F: $(0+\lambda) + (0+\lambda) - 2(4-2\lambda) + 2 = 0 \quad \Rightarrow 2\lambda - 8 + 4\lambda + 2 = 0 \;\Rightarrow 6\lambda = 6$
$\Rightarrow \lambda = 1$

$$\Rightarrow \vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Für den Radius der Kugel gilt dann:

$$r = \left|\overrightarrow{MQ}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 2-4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

Für den Durchmesser ergibt sich:

$$d = 2\sqrt{6} \approx \underline{\underline{4{,}9\text{ dm}}}$$

e) Der höchste Punkt H des Brunnens liegt senkrecht über dem Mittelpunkt der Kugel. Der Abstand ist der Radius. Für die x_3 – Koordinate von H gilt:

$$x_3 = 4 + \sqrt{6} \approx 6{,}4\,\text{dm} = \underline{\underline{64\,\text{cm}}}$$

© Marcus ter Haerst

f) $L_0(1/1/6)$; $L_t\left(t+1/t+1/6{,}2-5\cdot(t-0{,}2)^2\right)$

Wir schneiden die Fontäne mit der Ebene F, setzen diese also in die Ebenengleichung ein:

$(t+1)+(t+1)-2(6{,}2-5\cdot(t-0{,}2)^2)+2=0$

$\Rightarrow 2t+2-12{,}4+10\cdot(t^2-0{,}4t+0{,}04)+2=0$

$\Rightarrow 2t-8{,}4+10t^2-4t+0{,}4=0$

$\Rightarrow 10t^2-2t-8=0$

$$\Rightarrow 5t^2-t-4=0 \Rightarrow t_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot5\cdot(-4)}}{2\cdot5}=\frac{1\pm9}{10}\Rightarrow t_1=1;\ (t_2=-0{,}8<0)$$

$P\left(1+1/1+1/6{,}2-5\cdot(1-0{,}2)^2\right)\Rightarrow \underline{\underline{P(2/2/3)}}$

g) Die Höhe der Fontäne ist die x_3 – Koordinate von L_t.

Diese lässt sich als nach unten geöffnete Parabel interpretieren:

$y=6{,}2-5\cdot(t-0{,}2)^2=-5\cdot(t-0{,}2)^2+6{,}2$

Diese liegt in der Scheitelform vor. $\Rightarrow S(0{,}2/6{,}2)$

Die Fontäne ist also maximal 6,2 dm hoch und somit nicht so hoch wie der höchste Punkt des Brunnens (6,4 dm).

h) Das Volumen des Brunnens ist das Volumen der Pyramide (72) abzgl. des Volumens der halben Marmorkugel.

$$V_{Brunnen}=72-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\sqrt{6}^3\cdot\pi=72-4\cdot\sqrt{6}\cdot\pi\approx 41\,219\,\text{ml}$$

$(1\,dm^3=1l=1000\,ml)$

$$\frac{41\,219\,ml}{80\,ml/s}\approx 515\,s$$

In 515 Sekunden ist der Brunnen mit Wasser gefüllt.