Analysis Aufgabengruppe 2

1 $f(x)=\left(1-x^2\right)\cdot e^{-x}$

a) **Nullstellen**

$\underline{f(x)=0}:\ \left(1-x^2\right)\cdot\underbrace{e^{-x}}_{\neq 0}=0 \quad\Rightarrow 1-x^2=0 \quad\Rightarrow x^2=1 \quad\Rightarrow \underline{\underline{x_1=-1}};\ \underline{\underline{x_2=1}}$

f hat also genau zwei Nullstellen.

b) **Extrempunkte**

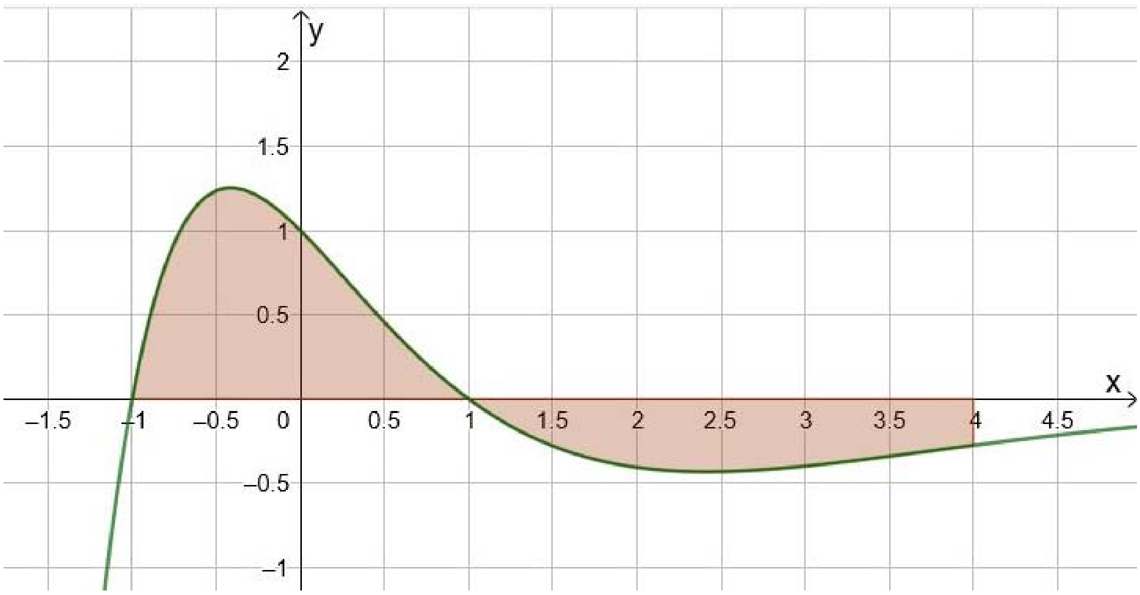
$f'(x)=-2x\cdot e^{-x}+\left(1-x^2\right)\cdot e^{-x}\cdot(-1)\ =e^{-x}\cdot\left(-2x-\left(1-x^2\right)\right)\ =e^{-x}\cdot\left(x^2-2x-1\right)$

$\underline{f'(x)=0}:\ \underbrace{e^{-x}}_{\neq 0}\cdot\left(x^2-2x-1\right)=0\ \Rightarrow x^2-2x-1=0$

$$\Rightarrow x_{1/2}'=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=\underline{\underline{1\pm\sqrt{2}}}$$

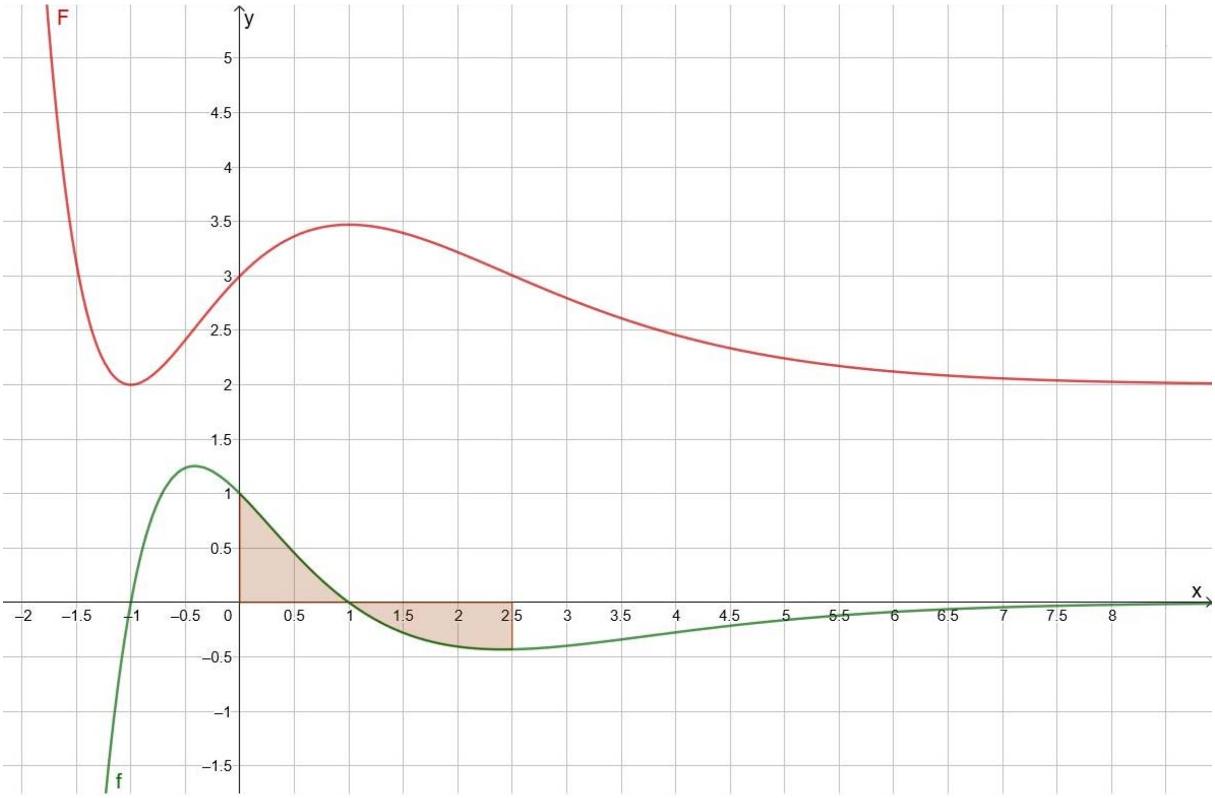
c) Hier müssen Kästchen gezählt werden. Dabei müssen die Kästchen unterhalb der x-Achse von denen oberhalb der x-Achse abgezogen werden. Jedes Kästchen misst $0{,}5\cdot0{,}5=0{,}25$ FE. Es ergibt sich:

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx \approx 0{,}25\cdot(6-4)=0{,}5$$



d) Die Funktion f, also die Ableitung von F, hat bei $x=-1$ eine einfache Nullstelle. Der Graph geht dort von ă nach +. Der Graph von F fällt daher links des Punktes T und er steigt rechts davon. Er hat also im Punkt T einen Tiefpunkt.

e) Wichtige Punkte für den Graphen von F sind neben den angegebenen der HOP bei $x=1$, der TIP bei $x=-1$ sowie Wendepunkte an den Stellen, an denen der Graph von f Extrempunkte hat.



f) $F(2{,}5)-F(0)\approx 0$

$F(2{,}5)-F(0)=\int_0^{2{,}5} f(x)dx\approx 0$: Die Fläche, die vom Graphen von f, der x-Achse und der y-Achse im Intervall $[0;1]$ eingeschlossen wird, ist gleich groß wie die Fläche, die vom Graphen von f, der x-Achse und der Geraden $x=2{,}5$ im Intervall $[1;2{,}5]$ eingeschlossen wird (siehe e).

g) $h_k(x)=\left(1-kx^2\right)\cdot e^{-x}$

Die Anzahl der Nullstellen hängt nur vom Wert der Klammer ab.

$\underline{h_k(x)=0}$: $1-kx^2=0 \quad \Rightarrow kx^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{k}$

Daraus ergibt sich: $k\le 0$: keine Lösung, also keine Nullstelle.

$k>0$: zwei Lösungen, also zwei Nullstellen.

h) Die Nullstellen liegen bei $\pm\sqrt{\frac{1}{k}}$ (s.o.). Der Abstand beträgt $2\cdot\sqrt{\frac{1}{k}}$.

Der Abstand soll 4 betragen: $2\cdot\sqrt{\frac{1}{k}}=4 \;\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{k}}=2 \;\Rightarrow \frac{1}{k}=4 \;\Rightarrow \underline{\underline{k=\frac{1}{4}}}$

i) Würden beide Graphen symmetrisch bezüglich der x-Achse zueinander liegen, müsste gelten: $f(x_0)=-h_k(x_0)$, also z.B. $f(0)=-h_k(0)$.

$$f(0)=\left(1-0^2\right)\cdot e^0=1\cdot 1=1$$
$$h_k(0)=\left(1-k\cdot 0^2\right)\cdot e^0=1\cdot 1=1$$

Beide Graphen enthalten unabhängig von k denselben Punkt. Daher können sie nie symmetrisch bezüglich der x-Achse zueinander liegen.

2 $g(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$

a) $$g'(x)=\frac{(e^x+1)\cdot e^x-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x\left(e^x+1-e^x\right)}{(e^x+1)^2}=\frac{\overbrace{e^x}^{>0}}{\underbrace{(e^x+1)^2}_{>0}}>0$$

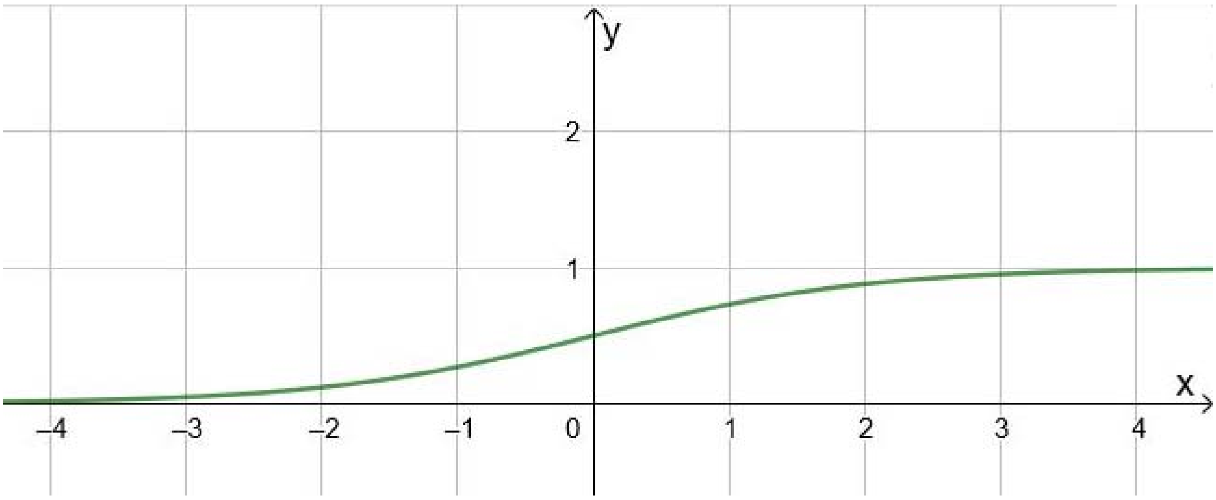
Die Ableitung ist immer positiv, daher ist g streng monoton zunehmend. Es gibt keine Extrema. Für die Wertemenge brauchen wir die Grenzwerte am Rande des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{e^x}^{\to\infty}}{\underbrace{e^x+1}_{\to\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(1+\frac{1}{\underbrace{e^x}_{\to 0}}\right)}=\frac{1}{1}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{e^x}^{\to 0}}{\underbrace{e^x+1}_{\to 1}}=\frac{0}{1}=0$$

Der Graph hat also zwei waagrechte Asymptoten und er steigt streng monoton. Daraus ergibt sich die Wertemenge: $\underline{\underline{W_g=\left]0;1\right[}}$

b) $g'(0)=\frac{e^0}{(e^0+1)^2}=\frac{1}{(1+1)^2}=\frac{1}{4}$



c) Wir strecken in y-Richtung mit Faktor 2 und verschieben dann um 1 nach unten.

$$g^*(x)=2\cdot\frac{e^x}{e^x+1}-1$$

d) Die y-Achse halbiert das Flächenstück, wenn gilt: $\int_{-\ln 3}^{0} g(x)dx=\int_{0}^{b} g(x)dx$

Die Stammfunktion bekommen wir mit der „Sonderregel" aus der Merkhilfe:
Der Zähler ist genau die Ableitung des Nenners. $G(x)=\ln|e^x+1|$

$$\left[\ln|e^x+1|\right]_{-\ln 3}^{0}=\left[\ln|e^x+1|\right]_{0}^{b}$$

$$\Rightarrow\left[\ln|e^0+1|\right]-\left[\ln|e^{-\ln 3}+1|\right]=\left[\ln|e^b+1|\right]-\left[\ln|e^0+1|\right]$$

$$\Rightarrow\ln 2-\left[\ln\left|\frac{1}{e^{\ln 3}}+1\right|\right]=\left[\ln|e^b+1|\right]-\ln 2$$

$$\Rightarrow 2\ln 2-\left[\ln\left|\frac{1}{3}+1\right|\right]=\ln|e^b+1|$$

$$\Rightarrow \ln 2^2-\ln\frac{4}{3}=\ln|e^b+1|$$

$$\Rightarrow \ln\frac{4}{\frac{4}{3}}=\ln|e^b+1|$$

$$\Rightarrow \ln 3=\ln|e^b+1|$$

$$\Rightarrow e^b+1=3\quad\Rightarrow e^b=2\quad\Rightarrow \underline{\underline{b=\ln 2}}$$